



Universität Rostock

Fakultät für Informatik und Elektrotechnik

Institut für Angewandte Mikroelektronik
und Datentechnik

LSB-Methode

Bestimmung von Distanzunterschieden mittels parametrierter Schwebungen

Dissertation

zur

Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

der Fakultät für Informatik und Elektrotechnik

der Universität Rostock

vorgelegt von

Matthias Schneider, geb. am 19. Juni 1975 in Rostock
aus Hansestadt Greifswald

Greifswald, 21. Januar 2013

Erster Gutachter	Prof. Dr.-Ing. habil. R. Salomon Universität Rostock Institut für Angewandte Mikroelektronik und Datentechnik
Zweiter Gutachter	Prof. Dr.-Ing. J. Thielecke Universität Erlangen-Nürnberg Professur für Informationstechnik (Schwerpunkt Ortsbestimmung und Navigation)
Dritter Gutachter	Prof. Dr. rer. nat. S. Knauth Hochschule für Technik Stuttgart Fakultät Vermessung, Informatik und Mathematik
Tag der Einreichung	11. Juni 2012
Tag der Verteidigung	10. Januar 2013

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand als externe unabhängige Arbeit am Institut für Angewandte Mikroelektronik und Datentechnik an der Fakultät für Informatik und Elektrotechnik der Universität Rostock während meiner hauptberuflichen Tätigkeit als Entwickler der übergeordneten Steuerung des Quench-Detektions-Systems des Fusionsexperiments Wendelstein W7-X am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Greifswald.

Da der Inhalt dieser Arbeit in keinem Bezug zu meiner Tätigkeit am Max-Planck-Institut steht, gilt meinem wissenschaftlichen Mentor Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Ralf Salomon mein ausdrücklicher Dank für die Ermöglichung dieser Arbeit, seiner Geduld und seiner Unterstützung zur Erstellung dieser Schrift. Gleichzeitig möchte ich mich sowohl bei Herrn Prof. Salomon wie auch bei Herrn Dr.-Ing. Dietrich Birus für die motivierenden Gespräche, zahlreichen Impulse und Denkanstöße bedanken.

Insbesondere Herrn Dr. Birus gilt mein ausdrücklicher Dank für die vielen praktischen und fachkompetenten Anregungen und Hilfestellungen bei der Durchführung meiner Experimente. Ich danke meinen beiden Arbeitskollegen Herrn Dr. Birus und Herrn Marko Fricke für ihr tolerantes Verständnis bei meinem außerberuflichen Engagement und die damit verbundene Doppelbelastung. Ein weiterer besonderer Dank gilt dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Greifswald für die großzügige Nutzung von Laboreinrichtungen und Geräten zur Durchführung meiner Experimente außerhalb meiner Arbeitszeit.

Ich möchte mich weiterhin bei den Korrekturlesern Frau und Herrn Heidecke, Herrn Dr. Birus, Herrn Christoph Thürkow und meinem Vater, Werner Schneider, bedanken. Sie haben viel Zeit und Aufwand investiert und mir viele Hinweise und Anregungen für den Feinschliff meiner Arbeit gegeben. Ganz besonders danken möchte ich auch meinen Eltern, Ingeborg und Werner Schneider, für ihre jahrelange Unterstützung und meinen vielen Freunden, die mir immer wieder motivierend zugesprochen haben, durchzuhalten.

Greifswald, 21. Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Algorithmen und Verfahren der Lokalisierung	5
2.1	Algorithmen	5
2.1.1	Triangulation	6
2.1.2	Trilateration	7
2.1.3	Multilateration	9
2.1.4	Methode der kleinsten Quadrate	11
2.2	Verfahren	14
2.2.1	Streckenmessung	15
2.2.2	Angle-of-Arrival	15
2.2.3	Time-of-Arrival	15
2.2.4	Time-Difference-of-Arrival	16
2.2.5	Cell-of-Origin	16
2.2.6	Fingerprint	17
3	Ausgewählte Lokalisierungssysteme	19
3.1	Elektromagnetische Systeme	19
3.2	Ultraschallsysteme	25
3.3	Infrarotsysteme	28
3.4	Lasersysteme	30
3.5	Bildverarbeitungssysteme	31
3.6	Gegenüberstellung	33
4	Ausgewählte physikalische Grundlagen	35
4.1	Schwebung	35
4.2	Phasenlage der Einhüllenden	37
4.3	Vor- und Nachteile	38
4.4	Zusammenfassung	39

5 Die LSB-Methode	41
5.1 Die Schwebungssignale	41
5.2 Das Interferenzsignal	42
5.3 Ortsabhängiges Interferenzmuster	42
5.4 Hüllkurve des Interferenzmusters	43
5.5 Herleitung der Hüllkurven	44
5.6 Zusammenfassung	46
6 Eigenschaften der LSB-Methode	49
6.1 Globale Trägerfrequenz	49
6.2 Modulationsfrequenz	50
6.3 Schwebungsfrequenz	51
6.4 Musterperiode	51
6.5 Musterfaktor	56
6.6 Einflüsse auf die Hüllkurve	56
6.7 Messbereich	60
6.8 Zusammenfassung	64
7 Gegenüberstellung zu anderen Lokalisierungssystemen	65
7.1 Phasenmessung	65
7.2 Zeitbereichsreflektometrie	66
7.3 Weitere Lokalisierungssysteme	67
7.4 Zusammenfassung	67
8 Experimentelle Validierung: Versuchsaufbau	69
8.1 Prinzipaufbau	69
8.2 Experimentalaufbau	69
8.3 Hüllkurven-Detektor	71
8.4 Ausbreitungsgeschwindigkeit	72
9 Experimentelle Validierung: Ergebnisse	75
9.1 Setup	75
9.2 Änderung des Musterfaktors	76
9.3 Änderung des Distanzunterschieds	78
9.4 Änderung der Trägerfrequenz	81
9.5 Zusammenfassung	81
10 Berechnungsverfahren: Mustererkennung	85

10.1 Verfahren	85
10.1.1 Summe der Quadratischen Differenzen	86
10.1.2 Granularität	87
10.1.3 Berechnungsablauf	87
10.1.4 Randbedingungen	88
10.2 Messungen	88
10.2.1 Distanzunterschied	88
10.2.2 Auflösungsvermögen	93
10.2.3 Zusammenfassung der Messergebnisse	94
11 Berechnungsverfahren: Fourier-Analyse	95
11.1 Grundlagen der Fourier-Transformation	95
11.1.1 Der Dirac-Impuls	95
11.1.2 Fourier-Reihe	96
11.1.3 Fourier-Transformation	98
11.1.4 Zeitverschiebung und Faltung	100
11.2 Verfahren	101
11.2.1 Fourier-Transformation der Hüllkurve	101
11.2.2 Rückgewinnung der Phase	106
11.2.3 Einschränkungen zum Berechnungsverfahren	108
11.2.4 Berechnungsablauf	108
11.3 Messungen	111
11.3.1 Distanzunterschied	112
11.3.2 Auflösungsvermögen	114
11.3.3 Zusammenfassung der Messergebnisse	115
12 Weitere Untersuchungen zur LSB-Methode	117
12.1 Simulations- und Fehlermodell	117
12.2 Amplitudendiskrepanz	120
12.2.1 Simulationssignale	121
12.2.2 Mustererkennung	123
12.2.3 Fourier-Analyse	123
12.2.4 Auswertung	124
12.3 Rauschen	124
12.3.1 Rausch-Modell	124
12.3.2 Simulationssignale	126
12.3.3 Mustererkennung	128

12.3.4	Fourier-Analyse	129
12.3.5	Auswertung	129
13	Diskussion	131
A	Messwerte	139
A.1	Mustererkennung	139
A.1.1	Interferenzpunktverschiebung in Richtung Signalquelle 1	139
A.1.2	Interferenzpunktverschiebung in Richtung Signalquelle 2	142
A.1.3	Feinauflösung	146
A.2	Fourier-Analyse	151
A.2.1	Interferenzpunktverschiebung in Richtung Signalquelle 1	151
A.2.2	Interferenzpunktverschiebung in Richtung Signalquelle 2	152
A.3	Normierte Distanzunterschiede der Mustererkennung	155

Abbildungsverzeichnis

2.1	Lokalisierungsalgorithmen	6
2.2	Triangulation in einer 2D-Umgebung.	7
2.3	Trilateration in einer 2D-Umgebung.	8
2.4	Multilateration in einer 2D-Umgebung.	10
2.5	Methode der kleinsten Quadrate	12
2.6	Fingerprint in einer 2D-Umgebung.	17
3.1	Zeitbereichsreflektometrie mit Störquellendetektion und Längenmessung.	20
3.2	Phasenmessung für zwei synchronisierte Signalquellen.	21
3.3	Das Landmarc-System.	22
3.4	Das SpotON System.	23
3.5	Das RADAR-System.	24
3.6	Das Active Bat System.	26
3.7	Das Cricket System.	27
3.8	Das Active Badge System.	29
3.9	Das Wireless Indoor Positioning System.	30
3.10	Laser Range Finder.	31
4.1	Schwebungen (–) und Einhüllende (–) zweier Sender.	36
4.2	Phasenlage zweier Schwebungen	37
5.1	Ortsabhängige Interferenzmuster der LSB-Methode.	43
5.2	Hüllkurve (–) eines Interferenzmusters (–).	44
5.3	Hüllkurvendetektion	45
6.1	Interferenzmuster	51
6.2	Musterperiode T_M	52
6.3	Signal für $k = 0.25$	54
6.4	Auto-Korrelation für $k = 0.25$	54
6.5	Signal für $k = 0.50$	54
6.6	Auto-Korrelation für $k = 0.50$	54
6.7	Signal für $k = 2.00$	55

6.8	Auto-Korrelation für $k = 2.00$	55
6.9	Signal für $k = 4.00$	55
6.10	Auto-Korrelation für $k = 4.00$	55
6.11	Musterfaktor k	56
6.12	Musterfaktor $k = 0.25$ bei verschiedenen Trägerfrequenzen.	58
6.13	Musterfaktor $k = 0.50$ bei verschiedenen Trägerfrequenzen.	58
6.14	Musterfaktor $k = 2.00$ bei verschiedenen Trägerfrequenzen.	58
6.15	Musterfaktor $k = 4.00$ bei verschiedenen Trägerfrequenzen.	58
6.16	Musterfaktor $k = 0.25$ bei verschiedenen Distanzunterschieden.	59
6.17	Musterfaktor $k = 0.50$ bei verschiedenen Distanzunterschieden.	59
6.18	Musterfaktor $k = 2.00$ bei verschiedenen Distanzunterschieden.	59
6.19	Musterfaktor $k = 4.00$ bei verschiedenen Distanzunterschieden.	59
6.20	Periodizität der Hüllkurve	61
6.21	Korrelation des Distanzunterschieds bei verschiedenen Musterfaktoren. .	63
8.1	Prinzipschaltbild der Rekonstruktion des Distanzunterschieds Δs	70
8.2	Schematische Struktur des Experimentalaufbaus.	71
8.3	Blockschaltbild des Hüllkurven-Detektors.	72
9.1	Hüllkurve für $k = 0.25$ und $f_{T_g} = 100$ MHz.	77
9.2	Hüllkurve für $k = 4.00$ und $f_{T_g} = 100$ MHz.	77
9.3	Distanzunterschiede bei $k = 0.25$	79
9.4	Distanzunterschiede bei $k = 0.50$	79
9.5	Distanzunterschiede bei $k = 2.00$	80
9.6	Distanzunterschiede bei $k = 4.00$	80
9.7	Frequenzeinfluss bei $k = 0.25$	82
9.8	Frequenzeinfluss bei $k = 0.50$	82
9.9	Frequenzeinfluss bei $k = 2.00$	83
9.10	Frequenzeinfluss bei $k = 4.00$	83
10.1	Verfahren der Mustererkennung	86
10.2	Schematische Struktur des Experimentalaufbaus.	89
10.3	$f_{T_g} = 50$ MHz, $k = 0.25$	91
10.4	$f_{T_g} = 50$ MHz, $k = 0.50$	91
10.5	$f_{T_g} = 50$ MHz, $k = 2.00$	92
10.6	$f_{T_g} = 50$ MHz, $k = 4.00$	92
11.1	Rechteckimpuls $y(t)$	98
11.2	Amplitudenspektrum $ A_n $ der Fourier-Reihe $y(t)$	99

11.3	Phasenspektrum φ_n der Fourier-Reihe $y(t)$	99
11.4	Funktion $h(t)$ und ihre Fourier-Transformierte $H(f)$	100
11.5	Amplitudenspektrum des gleichgerichteten Kosinus	105
11.6	Fourier-Spektren der Hüllkurven-Funktion.	107
11.7	Normierte Messergebnisse für $f_{T_g} = 50$ MHz.	113
11.8	Normierte Messergebnisse für $f_{T_g} = 100$ MHz.	114
11.9	Normierte Messergebnisse für $f_{T_g} = 150$ MHz.	114
11.10	Phasenlage der Rechteckfunktion $w(t)$	115
11.11	Verrauschte Hüllkurve des Interferenzsignals.	116
12.1	Abweichung \hat{s}_i des Messwertes $\Delta s'_i$ vom Erwartungswert Δs_i	118
12.2	Beispiele des Simulationsfehlermodells	120
12.3	$k = 2.00$ mit $D = 1$	122
12.4	$k = 2.00$ mit $D = 0.9$	122
12.5	$k = 2.00$ mit $D = 0.8$	122
12.6	$k = 2.00$ mit $D = 0.7$	122
12.7	$k = 2.00$ mit $D = 0.6$	122
12.8	$k = 2.00$ mit $D = 0.5$	122
12.9	$k = 2.00$ mit $D = 0.4$	122
12.10	$k = 2.00$ mit $D = 0.3$	122
12.11	$k = 2.00$ mit $D = 0.2$	122
12.12	$k = 2.00$ mit $D = 0.1$	122
12.13	Einfluss der Amplitudendiskrepanz bei Mustererkennung.	123
12.14	Einfluss der Amplitudendiskrepanz bei Fourier-Analyse.	123
12.15	Berechnungsablauf der Simulation von Rauschstörungen.	125
12.16	$SRV = 40$ dB.	127
12.17	$SRV = 40$ dB.	127
12.18	$SRV = 20$ dB.	127
12.19	$SRV = 20$ dB.	127
12.20	$SRV = 10$ dB.	127
12.21	$SRV = 10$ dB.	127
12.22	$SRV = 6$ dB.	127
12.23	$SRV = 6$ dB.	127
12.24	SRV für $k = 2.00$ und $k = 4.00$ mittels Mustererkennung.	128
12.25	SRV für $k = 2.00$ und $k = 4.00$ mittels Fourier-Analyse.	129
A.1	$f_{T_g} = 50$ MHz, $k = 0.25$	155
A.2	$f_{T_g} = 50$ MHz, $k = 0.50$	155

A.3	$f_{T_g} = 50 \text{ MHz}, k = 2.00.$	156
A.4	$f_{T_g} = 50 \text{ MHz}, k = 4.00.$	156
A.5	$f_{T_g} = 100 \text{ MHz}, k = 0.25$	157
A.6	$f_{T_g} = 100 \text{ MHz}, k = 0.50$	157
A.7	$f_{T_g} = 100 \text{ MHz}, k = 2.00.$	158
A.8	$f_{T_g} = 100 \text{ MHz}, k = 4.00.$	158
A.9	$f_{T_g} = 150 \text{ MHz}, k = 0.25$	159
A.10	$f_{T_g} = 150 \text{ MHz}, k = 0.50$	159
A.11	$f_{T_g} = 150 \text{ MHz}, k = 2.00.$	160
A.12	$f_{T_g} = 150 \text{ MHz}, k = 4.00.$	160

Tabellenverzeichnis

3.1	Referenzwerttabelle des RADAR-Systems.	25
3.2	Vergleich der Systeme zur Lokalisierung.	34
10.1	Absolute Ungenauigkeit δe der Mustererkennung.	90
11.1	Absolute Ungenauigkeit δe der Fourieranalyse.	112
A.1	Verschiebung des Interferenzpunkts in Richtung Signalquelle 1.	139
A.2	Verschiebung des Interferenzpunkts in Richtung Signalquelle 2.	143
A.3	Feinauflösung für $-2 \text{ cm} \leq \Delta s_E \leq 2 \text{ cm}$ mit Schrittweite 2 mm.	146
A.4	Verschiebung des Interferenzpunkts in Richtung Signalquelle 1.	151
A.5	Verschiebung des Interferenzpunkts in Richtung Signalquelle 2.	153

Abkürzungsverzeichnis

DDS	Direct Digital Synthesizer
FFT	Fast Fourier Transformation
FM	Frequenz-Modulation
GPS	Global Positioning System
LSB	Localization by Superposing Beats
o.B.d.A.	ohne Beweis der Allgemeinheit
RFID	Radio Frequency Identification

Symbolverzeichnis

D	Amplitudendiskrepanz
SRV	Signal-Rausch-Verhältnis
Δs	Distanzunterschied
$\circ \rightarrow \bullet$	Symbol der Fourier-Transformation
$*$	Faltungsoperator
δe	Absolute Ungenauigkeit
δs	Distanzunterschiedsänderung
$\tilde{r}_{\Delta t}(t)$	Hüllkurve des Interferenzsignals
$b_i(t)$	Schwebungssignal
c	Lichtgeschwindigkeit
f_T	Trägerfrequenz einer Schwebung
f_m	Modulationsfrequenz
f_s	Schwebungsfrequenz
f_{T_g}	Globale Trägerfrequenz
j	Komplexe Zahl: $j = \sqrt{-1}$
k	Musterfaktor
p	Granularität
$r_{\Delta t}(t)$	Interferenzsignal

1 Einleitung

Seit der Mensch zurück denkt, ist es für ihn wichtig zu wissen, wie weit etwas von ihm entfernt ist und wo er sich selbst befindet. Bereits die Jäger und Sammler mussten für ihr tägliches Überleben wissen, in welcher Richtung von ihrem Dorf aus, wie viele Tagesmärsche entfernt, Tiere und Früchte zu finden sind. Schon tausend Jahre vor unserer Zeit, als für die Menschen in Europa die Erde noch eine Scheibe war und sie hinter Gibraltar das Ende der Welt vermuteten, unternahmen die Polynesier bereits Seereisen über tausende von See-meilen zwischen den vielen Inseln von Hawaii im Norden nach Neuseeland im Südwesten und den Osterinseln im Südosten. Die Polynesier orientierten sich dabei an der Bewegung von Sonne, Mond, Planeten und Sternen aber auch am Flug von Seevögeln. Erst im 15. Jahrhundert begann für Europa das *Zeitalter der Entdeckungen* und es wurde begonnen, die Erde mit detaillierten Karten zu erfassen und begreifen zu lernen. Oder wie hätten die Händler der Antike ohne das Bewusstsein von Entfernung und Ort ihre Waren im Mittelmeerraum und darüber hinaus anbieten können? Für den Menschen war es schon immer wichtig zu wissen, wo er sich befindet und wie weit er von einem anderen Ort entfernt ist. Die Beantwortung dieser beiden Fragen war und ist für ihn essenziell, um sich in seiner Umwelt zurechtzufinden, sich zu orientieren.

Natürlich beinhaltet die allgemeine Frage nach dem Ort nicht ausschließlich die Orientierung des Menschen in seiner Umwelt. Es ist vielmehr die allgemeine Beantwortung der Frage: „Wo befindet sich etwas?“. Dieses *Etwas* kann beispielsweise eine Person in einem Raum, ein Loch in einem Wasserrohr oder ein bestimmter Betrachtungspunkt in einer elektrischen Leitung sein. Mit der LSB-Methode – *Localization by Superposing Beats* – stellt diese Arbeit ein System vor, dass anhand von elektromagnetischen Signalen Distanzunterschiede misst und daraus den Ort eines Betrachtungspunkts in einer elektrischen Leitung ableitet. Auf Grund der verwendeten elektromagnetischen Signale liegt auch der Gedanke nahe, die LSB-Methode nicht nur zur Ortung in elektrischen Leitungen zu verwenden, sondern auch bei Funksystemen einzusetzen. Dieser Gedanke ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Der Themenschwerpunkt der Arbeit liegt hauptsächlich in der Untersuchung des Funktionsprinzips und der allgemeinen Wirkungsweise der LSB-Methode.

Einleitend, ehe auf die LSB-Methode detailliert eingegangen wird, beschreibt die Arbeit die Lokalisierungs-Algorithmen (Kapitel 2): Triangulation, Trilateration und Multilateration

zur Berechnung eines Ortes. Ein Lokalisierungs-Algorithmus beschreibt, wie aus den Messgrößen absolute Distanz, Distanzunterschied oder Winkel zwischen verschiedenen Fixpunkten und dem Betrachtungspunkt, der Ort des Betrachtungspunkts berechnet wird. Weiterhin wird beschrieben, mit welchen Verfahren der Lokalisierung diese Messgrößen bestimmt werden. Es wird sich dabei hauptsächlich auf Verfahren konzentriert, die besonders für den Einsatz von elektromagnetischen Signalen zur Bestimmung der gesuchten Messgrößen absolute Distanz, Distanzunterschied und Winkel geeignet sind. Die vorgestellten Verfahren messen die Laufzeit, die elektrische Feldstärke oder im Falle von Funksignalen die Abstrahlungs- beziehungsweise Empfangs-Richtung des Signals und leiten daraus die gesuchten Messgrößen ab. Für die Schaffung eines allgemeineren Überblicks des Themas Lokalisierung werden im Kapitel 3 neben Systemen mit elektromagnetischen Signalen auch Lokalisierungssysteme anderer Technologien, wie zum Beispiel Ultraschall, Infrarot, Laser oder Bildverarbeitung skizziert. Dabei wird sich überwiegend auf Systeme mit relativ (im Vergleich zu anderen Systemen) einfachem technischen Aufbau beschränkt. Auf das bekannteste Lokalisierungssystem, dem *Global Positioning System* (GPS), wird daher auf Grund seiner komplexen technischen Realisierung nicht näher eingegangen.

Nach dem allgemeinen Exkurs zur Lokalisierung werden in Kapitel 4 ausgewählte physikalische Grundlagen für ein besseres Verständnis der LSB-Methode gegeben. Dabei handelt es sich insbesondere um die Erscheinung der *Schwebung*. Die LSB-Methode baut auf dieser physikalischen Erscheinung auf. Um die LSB-Methode besser zu verstehen, wird auf die Schwebung in ihren Grundzügen näher eingegangen und die besonderen relevanten Merkmale für die LSB-Methode hervorgehoben. Aufbauend auf den gelegten Grundlagen wird in Kapitel 5 die LSB-Methode in ihrer Funktionsweise detailliert beschrieben. Wie aus der Superposition von speziell parametrisierten Schwebungen ein Interferenzsignal mit einem *orts-abhängigen* Interferenzmuster entsteht und wie dieses Interferenzsignal durch Bildung seiner Hüllkurve für die Bestimmung des Distanzunterschieds ausgewertet wird. Weiterhin wird auf die spezifischen Charakteristika der verwendeten und entstehenden Signale eingegangen. Kapitel 6 vertieft anschließend die spezifischen Charakteristika der verwendeten und entstehenden Signale und beschreibt im Detail die Eigenschaften der LSB-Methode. Die Beschreibung der LSB-Methode schließt mit einer Gegenüberstellung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden der LSB-Methode zu den beiden Lokalisierungssystemen Phasenmessung und Zeitbereichsreflektometrie für eine bessere Einordnung der LSB-Methode zu den Lokalisierungssystemen ab.

Der mittlere Teil der Arbeit, in den Kapiteln 8 und 9, geht auf die durchgeführten experimentellen Untersuchungen zur LSB-Methode und die erhaltenen Ergebnisse ein. Die durchgeführten Experimente dienten zum einen der prinzipiellen Validierung des Funktionsprinzips der LSB-Methode und zum anderen der Untersuchung, welchen Einfluss die

verschiedenen (im Kapitel 6 beschriebenen) Parameter der LSB-Methode auf den zu bestimmenden Distanzunterschied nehmen. Um den Distanzunterschied letztendlich zu bestimmen, werden in den beiden Kapiteln 10 und 11 die Mustererkennung und die Fourieranalyse als zwei mögliche Berechnungsverfahren vorgestellt. Beide Berechnungsverfahren werden in ihrer Funktionsweise beschrieben und anhand von Ergebnissen aus experimentellen Messungen zur Bestimmung des Distanzunterschieds diskutiert und bewertet.

Die Arbeit schließt in Kapitel 12 mit einer Diskussion zur Untersuchung der Amplitudendiskrepanz und des Einflusses von Rauschen auf das Interferenzsignal die Betrachtungen zur LSB-Methode ab. Um diese Störeinflüssen näher zu untersuchen, wurden verschiedene Simulationen durchgeführt. In erster Linie dienten die Untersuchungen dazu, die eigene Robustheit und Störuneempfindlichkeit der LSB-Methode gegenüber diesen Störungen zu untersuchen. Dies beinhaltete auch die Untersuchung der Güte der Berechnungsverfahren in Bezug auf diese Störgrößen. Es wurde untersucht, wie groß der Einfluss einer Störung maximal werden darf, damit noch tolerierbare Ergebnisse erzielt werden. In der abschließenden allgemeinen Diskussion (Kapitel 13) werden die erzielten Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick über weiterführende Arbeiten zur LSB-Methode gegeben und nochmals der Gedanke aufgegriffen, die LSB-Methode nicht nur in einem kabelgebundenen Lokalisierungssystem sondern eventuell auch in einem funkbasierten System einzusetzen.

2 Algorithmen und Verfahren der Lokalisierung

Als *Lokalisierung* werden Vorgänge bezeichnet, welche die Bestimmung eines betrachteten Ortes relativ zu bekannten Fixpunkten ermöglichen. Der *Ort* beschreibt die Lage des Betrachtungspunkts zu diesen Fixpunkten in einem bekannten Koordinatensystem, welches durch die Fixpunkte aufgespannt wird. Fixpunkte können zum Beispiel die Ecken eines Raumes oder Landmarken wie Kirch- oder Leuchttürme sein, aber auch einfach nur zwei Punkte auf einer Geraden. Die Ortsbestimmung – *Lokalisierung* – erfolgt durch die Bestimmung der Distanz zwischen dem Betrachtungspunkt und den Fixpunkten oder durch die Bestimmung der Ausrichtung (z.B. Himmelsrichtung oder geometrischer Winkel) des Betrachtungspunkts zu den Fixpunkten. In Abhängigkeit der Anzahl der Fixpunkte lässt sich der Ort des Betrachtungspunkts als ein Punkt auf einer Geraden, als ein Punkt in der Ebene oder als ein Punkt im Raum bestimmen. Ein System zur Lokalisierung misst also mit einer ausgewählten Technologie, wie zum Beispiel elektromagnetischer Signale (auf Leitern oder als Funksignal in der Luft), Ultraschall oder Laser die Distanz oder den Winkel zwischen dem Betrachtungspunkt und den Fixpunkten und berechnet aus den erhaltenen Messwerten den Ort. Es werden nun in den folgenden Ausführungen zunächst die Algorithmen Triangulation, Trilateration und Multilateration zur Berechnung des Ortes und verschiedene Basistechniken zur Bestimmung von Distanzen und Winkeln beschrieben. Weiterhin werden Systeme zur Lokalisierung vorgestellt, die auf den Algorithmen und den Basistechniken aufbauen.

2.1 Algorithmen

Die Berechnung des Ortes wird im Wesentlichen mit den Algorithmen: *Triangulation*, *Trilateration* und *Multilateration* (Abbildung 2.1) durchgeführt. Allen drei Algorithmen ist gemein, dass sie auf den Berechnungsvorschriften in Dreiecken basieren. Während die Triangulation die Ausrichtung, also den Winkel des Betrachtungspunkts zu den Fixpunkten verwendet, nutzt die Trilateration die direkte Distanz des Betrachtungspunkts zu den Fixpunkten. Die Multilateration wendet im Gegensatz zur Trilateration die Distanzunterschiede zwischen dem Betrachtungspunkt und den Fixpunkten zur Berechnung des Ortes an.

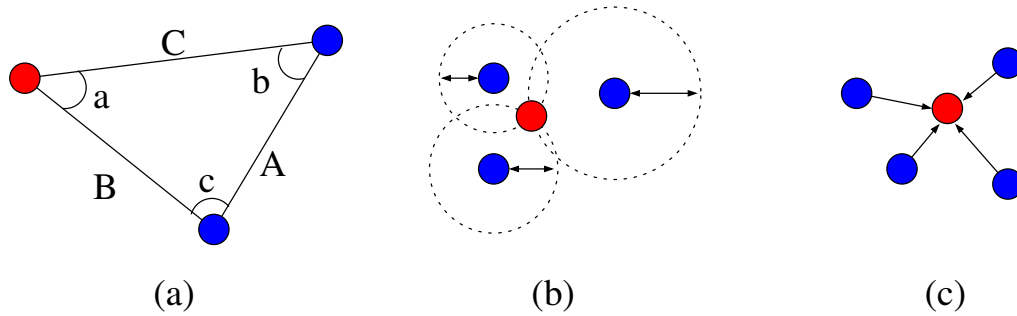


Abbildung 2.1: Lokalisierungsalgorithmen: (a) Triangulation, (b) Trilateration und (c) Multilateration.

2.1.1 Triangulation

Die Triangulation verwendet als einzige der drei Algorithmen Winkel für die Berechnung des Ortes P des Betrachtungspunkts. Abbildung 2.2 zeigt die Winkelbeziehungen an den Fixpunkten R_i in einer 2D-Umgebung für eine Anordnung von vier Fixpunkten in einem Rechteck mit den Kantenlängen L und B . Von jedem Fixpunkt aus wird der Winkel zum Betrachtungspunkt bestimmt. Mit Hilfe des Sinussatzes für allgemeine Dreiecke werden anschließend die Distanzen d_1 , d_2 , d_3 und d_4 aus den Winkeln α , β , γ und δ berechnet. Abschließend wird die Trilateration (Abschnitt 2.1.2) für die Berechnung des Punkts $P(x,y)$ angewendet. Abbildung 2.2 zeigt für den Punkt $P(x,y)$ ein mehrfach überbestimmtes System. Für die Bestimmung von $P(x,y)$ ist eine der Dreiecks kombinationen aus $\Delta R_1 R_2 P$, $\Delta R_2 R_3 P$ und $\Delta R_3 R_4 P$ völlig ausreichend.

Beispiel

Anhand des Dreiecks $\Delta R_2 R_3 P$ wird die Berechnung des Punkts $P(x,y)$ beispielhaft beschrieben. Für dieses Dreieck ergibt sich mit dem Sinussatz [7] folgende Beziehung zwischen den Winkeln und den Dreiecksseiten:

$$\frac{L}{\sin(\varphi)} = \frac{d_2}{\sin(\beta_1)} = \frac{d_3}{\sin(\alpha)} \quad ,$$

woraus sich die beiden unbekannten Seiten d_2 und d_3 ableiten lassen:

$$d_2 = \frac{L \cdot \sin(\beta_1)}{\sin(\varphi)} \quad \text{und} \quad d_3 = \frac{L \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\varphi)} \quad .$$

Der Winkel φ sowie die Distanz L zwischen den Fixpunkten $R_2(x_2, y_2)$ und $R_3(x_3, y_3)$ ergeben sich aus dem Innenwinkelsatz und dem Satz des Pythagoras [7]:

$$\varphi = 180^\circ - (\alpha + \beta_1) \quad (\text{Innenwinkelsatz})$$

$$L^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \quad . \quad (\text{Satz des Pythagoras})$$

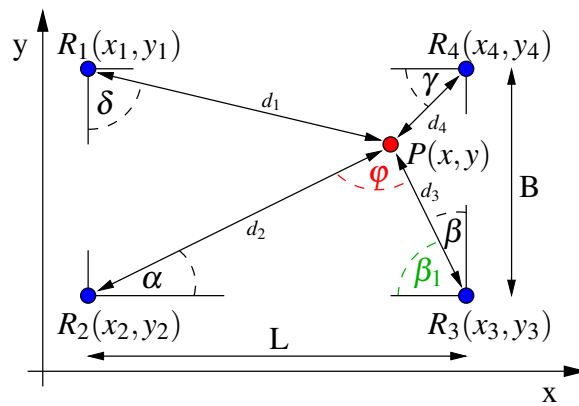


Abbildung 2.2: Triangulation in einer 2D-Umgebung.

Mit den bestimmten Distanzen d_2 und d_3 und den Fixpunkten $R_2(x_2, y_2)$ und $R_3(x_3, y_3)$ wird nun der Punkt $P(x, y)$ mittels Trilateration (Abschnitt 2.1.2) berechnet.

Die Überbestimmtheit der in Abbildung 2.2 gezeigten Anordnung kann genutzt werden, um die Genauigkeit des Punktes $P(x, y)$ zu erhöhen. Die verwendeten Winkel α bis γ sind reale Messwerte und somit zwangsläufig fehlerbehaftet. Werden für alle drei Dreiecks kombinationen die Punkte $P_{\Delta 1}(x, y)$, $P_{\Delta 2}(x, y)$ und $P_{\Delta 3}(x, y)$ berechnet, kann der Punkt $P(x, y)$ zum Beispiel als Mittelwert dieser drei Punkte oder mittels Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (Abschnitt 2.1.4) bestimmt und dadurch seine Genauigkeit erhöht werden.

2.1.2 Trilateration

Die Trilateration (Abbildung 2.3) verwendet zur Berechnung des Ortes P eines Betrachtungspunktes die direkten Distanzen zwischen den Fixpunkten und dem Betrachtungspunkt. Mittels der Distanzen werden Kreise (2D-Umgebung) oder Kugeln (3D-Umgebung) um die Fixpunkte geschlagen beziehungsweise aufgespannt. Die sich ergebenden Kreise beziehungsweise Kugeln werden durch Kreis- beziehungsweise Kugelgleichungen der euklidische Geometrie beschrieben. Der Schnittpunkt der Kreise beziehungsweise Kugeloberflächen entspricht dann dem Ort P des Betrachtungspunktes. In einer 2D-Umgebung ergibt sich mit den euklidischen Distanzen zwischen n Fixpunkten $R_i(x_i, y_i)$ mit $i = 1 \dots n$ und dem Punkt $P(x, y)$ folgendes allgemeines Gleichungssystem (2.1):

$$\begin{pmatrix} (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 \\ (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 \\ \vdots \\ (x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^2 \\ d_2^2 \\ \vdots \\ d_n^2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

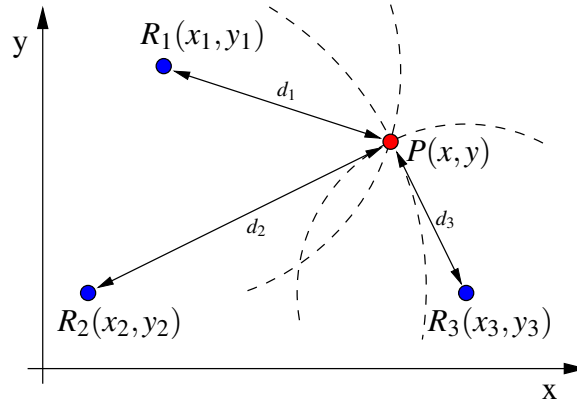


Abbildung 2.3: Trilateration in einer 2D-Umgebung.

Durch Umformung des Gleichungssystems (2.1) mittels des Verfahrens der gaußschen Elimination [7] wird das Gleichungssystem nach Subtraktion der n -ten Gleichung von den Gleichungen $i = 1 \dots n - 1$ und der Auflösung der Ausdrücke $(x_i - x)^2$ und $(y_i - y)^2$ nach der binomischen Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ in ein Matrix-Vektor-Produkt überführt:

$$\begin{pmatrix} 2(x_1 - x_n) & 2(y_1 - y_n) \\ 2(x_2 - x_n) & 2(y_2 - y_n) \\ \vdots & \vdots \\ 2(x_{n-1} - x_n) & 2(y_{n-1} - y_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_n^2 + y_1^2 - y_n^2 - d_1^2 + d_n^2 \\ x_2^2 - x_n^2 + y_2^2 - y_n^2 - d_2^2 + d_n^2 \\ \vdots \\ x_{n-1}^2 - x_n^2 + y_{n-1}^2 - y_n^2 - d_{n-1}^2 + d_n^2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{p} = \vec{d} \quad . \quad (2.2)$$

Die Lösung des Gleichungssystems (2.2) in der Form $\vec{p} = A^{-1} \cdot \vec{d}$ bestimmt den Punkt $P(x, y)$ eindeutig, sofern die Distanzen d_i nicht fehlerbehaftet sind. Sind die Distanzen fehlerbehaftet oder existieren mehr als $m + 1$ Fixpunkte (das Gleichungssystem ist dann überbestimmt), wobei m für die Anzahl der Dimensionen (2D-Umgebung $m = 2$) steht, wird die Lösung des Gleichungssystems als Regressionsproblem aufgefasst und mittels einer Optimierungsstrategie gelöst. Ein typischer Vertreter ist die Methode der kleinsten Quadrate (Abschnitt 2.1.4).

Beispiel

Für die in Abbildung 2.3 dargestellte Anordnung lässt sich folgendes Gleichungssystem aus den drei bekannten Distanzen $d_1 = \overline{R_1P}$, $d_2 = \overline{R_2P}$ und $d_3 = \overline{R_3P}$ aufstellen:

$$\begin{pmatrix} (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 \\ (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 \\ (x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^2 \\ d_2^2 \\ d_3^2 \end{pmatrix} \quad ,$$

sowie das daraus resultierende Matrix-Vektor-Produkt ableiten:

$$\begin{pmatrix} 2(x_1 - x_3) & 2(y_1 - y_3) \\ 2(x_2 - x_3) & 2(y_2 - y_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 - d_1^2 + d_3^2 \\ x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2 - d_2^2 + d_3^2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{p} = \vec{d} \quad .$$

Zur einfacheren Darstellung der weiteren Rechenschritte werden die mathematischen Gleichungen der Matrixfelder aus $A \cdot \vec{p} = \vec{d}$ mit den Matrixfeldern angegeben:

$$A \cdot \vec{p} = \vec{d} \quad : \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} \quad .$$

Zur Lösung der Form $\vec{p} = A^{-1} \cdot \vec{d}$ zur Berechnung des Punkts $P(x, y)$ wird die inverse Matrix A^{-1} von A aufgestellt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{A_{22}}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} & \frac{A_{12}}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} \\ \frac{A_{21}}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} & -\frac{A_{11}}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} \end{pmatrix} \quad .$$

Für x und y ergeben sich somit nach multiplizieren von $A^{-1} \cdot \vec{d}$ die folgenden Gleichungen:

$$P(x, y) := \vec{p} = \begin{cases} x = A_{11}^{-1}d_x + A_{12}^{-1}d_y \\ y = A_{21}^{-1}d_x + A_{22}^{-1}d_y \end{cases} \quad .$$

Der Punkt $P(x, y)$ ist damit unter der Voraussetzung der Fehlerfreiheit der Distanzen d_i eindeutig bestimmt.

2.1.3 Multilateration

Die Multilateration [40], auch als hyperbolische Lateration oder Hyperbelnavigation bezeichnet, verwendet wie die Trilateration (Abschnitt 2.1.2) die Distanz zur Bestimmung des Ortes P eines Betrachtungspunkts mit dem Unterschied, dass nicht die direkte Distanz, sondern die Unterschiede der einzelnen Distanzen zwischen den Fixpunkten und dem Betrachtungspunkt angewendet werden. Im Detail: die Trilateration nutzte die direkten Distanzen d_1 , d_2 und d_3 (siehe Abbildung 2.3) zur Ortsbestimmung. Die Multilateration nutzt nun die Unterschiede dieser Distanzen $d_i = d_1 - d_2$, $d_{ii} = d_1 - d_3$ und $d_{iii} = d_2 - d_3$. Damit sind die tatsächlichen Distanzen zwischen den Fixpunkten und dem Betrachtungspunkt nicht von Bedeutung. Werden alle möglichen Kombinationen verschiedener Distanzen zweier Fixpunkte, die denselben Distanzunterschied in der Ebene oder im Raum aufweisen, zusammengefasst, entsteht zwischen den beiden Fixpunkten in einer 2D-Umgebung eine Hyperbel und in einer 3D-Umgebung ein Hyperboloid. Für ein einfacheres Verständnis beschränken sich alle

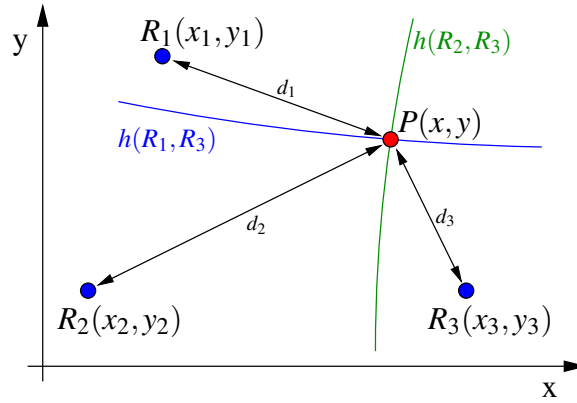


Abbildung 2.4: Multilateration in einer 2D-Umgebung.

folgenden Betrachtungen auf die 2D-Umgebung. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass für jeden Punkt der Hyperbel gilt, dass die Differenz der Distanzen zwischen den beiden Fixpunkten zum Punkt der Hyperbel gleich ist. Der gesuchte Ort P des Betrachtungspunkts liegt somit auf dieser Hyperbel. Der tatsächliche Ort P des Betrachtungspunkts entspricht dann dem Schnittpunkt zweier Hyperbeln.

Beispiel

Abbildung 2.4 zeigt für eine 2D-Umgebung die Beziehungen von drei Fixpunkten zum Betrachtungspunkt $P(x, y)$ mit den Hyperbeln $h(R_1, R_3)$ und $h(R_2, R_3)$. Mit der Definition, dass eine Hyperbel [7] die Menge aller Punkte einer Ebene ist, deren Distanzen von zwei festen Punkten auf der Ebene (den *Brennpunkten*) F_1 und F_2 eine konstante Differenz aufweisen:

$$\overline{F_1P} - \overline{PF_2} = \text{konst.} < \overline{F_1F_2} \quad , \quad (2.3)$$

ergibt sich folgender Zusammenhang für den Punkt $P(x, y)$ und den Fixpunkten $R_i(x_i, y_i)$ und $R_j(x_j, y_j)$:

$$\Delta d_{ij} = d_i^2 - d_j^2 = [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2] - [(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2] \quad \text{mit} \quad i \neq j \quad . \quad (2.4)$$

Wird Gleichung (2.4) durch die Differenz Δd_{ij} dividiert, entsteht die allgemeine Hyperbelgleichung (2.5) [8]. Es wird somit keine exakte Distanz d_{ij} benötigt. Diese liegt vielmehr implizit in dem sich aufspannenden Gleichungssystem (Gleichung (2.5)) vor.

$$1 = \frac{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}{\Delta d_{ij}} - \frac{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2}{\Delta d_{ij}} \quad (2.5)$$

Für die beiden Hyperbeln $h(R_1, R_3)$ und $h(R_2, R_3)$ in Abbildung 2.4 ergeben sich die folgenden Hyperbelgleichungen:

$$h(R_1, R_3) : \quad \Delta d_{13} = [(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2] - [(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2] \quad (2.6)$$

$$h(R_2, R_3) : \quad \Delta d_{23} = [(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2] - [(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2] \quad (2.7)$$

Die Berechnung des Ortes $P(x, y)$ mit den Koordinaten x und y erfolgt durch die Umstellung von Gleichung (2.6) nach x mit vorheriger Ausmultiplizierung des Ausdrucks $(x_i - x)^2$ mit der binomischen Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$x = \frac{x_1^2 + (y_1 - y)^2 - x_3^2 - (y_3 - y)^2 - \Delta d_{13}}{2(x_1 - x_3)} \quad (2.8)$$

und anschließendem Einsetzen von Gleichung (2.8) in Gleichung (2.7). Damit ist der Punkt $P(x, y)$ eindeutig bestimmt. Wie bereits bei der Triangulation (Abschnitt 2.1.1) und der Trilateration (Abschnitt 2.1.2) angesprochen, unterliegen auch die Messwerte für die Distanzunterschiede Δd_{ij} einem Messfehler. Für das Gleichungssystem (2.4) existiert somit oft keine Punktlösung und es wird mit einer Optimierungsstrategie wie zum Beispiel der Methode der kleinsten Quadrate gelöst.

2.1.4 Methode der kleinsten Quadrate

Die Methode der kleinsten Quadrate [15] ist kein Algorithmus zur Bestimmung eines Punktes, wie die Triangulation, die Trilateration oder die Multilateration. Sie wird aber häufig zusammen mit den beschriebenen Algorithmen eingesetzt, um den zu lokalisierenden Punkt P zu bestimmen. Insbesondere findet sie Anwendung, wenn die vorliegenden Messwerte (Winkel, Distanzen) fehlerbehaftet sind oder das System überbestimmt ist. Ein System ist überbestimmt, wenn mehr Messwerte für die Berechnung der eindeutigen Lösung vorliegen, als notwendig sind. An dieser Stelle wird trotzdem kurz auf diese Methode eingegangen, ohne einen mathematischen Beweis der Methode anzuführen. Hierzu wird auf die einschlägige Literatur zu diesem Thema verwiesen.

Sind die aufgenommenen Messwerte bei bestimmten Gleichungssystemen fehlerbehaftet oder ist das Gleichungssystem überbestimmt, sind Ausgleichsrechnungen eine Möglichkeit, die Lösung des Gleichungssystems zu berechnen. Natürlich können die Messwerte bei überbestimmten Gleichungssystemen ebenfalls fehlerbehaftet sein. Ein Vertreter der Ausgleichsrechnungen ist die *Methode der kleinsten Quadrate*. Das Verfahren wurde bereits von Carl Friedrich Gauß (1777-1855, dt. Mathematiker) im Jahre 1795 beschrieben. Es wird versucht die Summe der Quadrate der Abweichungen r_i zwischen den wahren Größen \hat{y}_i und den aus den fehlerbehafteten Messwerten berechneten Größen y_i zu minimieren (Gleichung (2.9)).

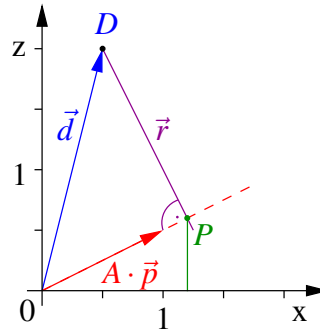


Abbildung 2.5: Methode der kleinsten Quadrate (vereinfachte Darstellung).

Die Abweichungen r_i werden *Residuen* genannt.

$$Q := \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n r_i^2 = \text{Minimum} \quad (2.9)$$

Das Residuum r ist somit die Abweichung vom wahren Ergebnis, wenn in eine Gleichung Näherungslösungen eingesetzt werden. Angenommen eine Funktion f sei gegeben und es ist ein x zu finden, so dass gilt:

$$f(x) = y \quad .$$

Mit der Näherung x_0 (Messwert) an x (wahrer Wert) ist das Residuum r :

$$r = y - f(x_0) \quad .$$

Das Residuum ist nicht mit dem Fehler e zu verwechseln. Der Fehler e ist hingegen:

$$e = x_0 - x \quad .$$

Der Fehler e ist in der Regel unbekannt, da x unbekannt und somit als Abbruchkriterium in einem numerischen Verfahren nicht nutzbar ist. Das Residuum ist dagegen stets verfügbar. Wenn das Residuum klein ist, kann die Näherung x_0 nur nahe bei der Lösung x liegen. Es ist zu beachten, dass das Residuum r und der Fehler e nicht ein und denselben Sachverhalt beschreiben. Angewendet auf das Gleichungssystem der Trilateration $A \cdot \vec{p} = \vec{d}$ (Gleichung (2.2)) berechnen sich die Residuen \vec{r} nach:

$$\vec{r} = A \cdot \vec{p} - \vec{d} \quad . \quad (2.10)$$

Die Residuen werden minimal, wenn der Betrag des Residuen-Vektors $\|\vec{r}\|$:

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2}$$

minimal wird. Der Betrag des Residuen-Vektors ist dann minimal, wenn er orthogonal zu $A \cdot \vec{p}$ ist. Bezogen auf einen dreidimensionalen Raum bedeutet dies, dass der Residuen-Vektor senkrecht auf der durch $A \cdot \vec{p}$ aufgespannten Ebene steht. Abbildung 2.5 zeigt die geometrische Interpretation von Gleichung (2.10) für die zweidimensionale Ansicht der x-z-Ebene. Die Ebene $A \cdot \vec{p}$ entspricht der gekippten x-y-Ebene mit Drehpunkt y-Achse. Der Residuen-Vektor \vec{r} ist die Normale des Punktes D auf der Ebene $A \cdot \vec{p}$ mit dem Durchstoßpunkt P . Die Koordinaten des Durchstoßpunkts P sind die Lösungen des Vektors \vec{p} :

$$P(x,y) := \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Beispiel

Für das in Abbildung 2.5 aufgetragene Gleichungssystem $A \cdot \vec{p} = \vec{d}$ werden in Anlehnung an das Beispiel der Trilateration (Abschnitt 2.1.2) folgende frei gewählte Werte für eine Berechnung in der Ebene gesetzt:

$$A \cdot \vec{p} = \vec{d}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

In einer anderen Schreibweise:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y \right) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und für die Berechnung des Residuen-Vektors \vec{r} entsteht:

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} x}_{\vec{a}x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y}_{\vec{b}y} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{d}} \right) = \vec{r}$$

$$\vec{a}x + \vec{b}y - \vec{d} = \vec{r} .$$

Damit der Residuen-Vektor \vec{r} minimal wird, muss er orthogonal zur Ebene $A \cdot \vec{p}$ sein. Der Residuen-Vektor muss also senkrecht auf dem Vektor a ($\vec{r} \perp \vec{a}$) und dem Vektor b ($\vec{r} \perp \vec{b}$) stehen.

Zwei Vektoren stehen senkrecht zueinander, wenn ihr Skalarprodukt [7] Null ist:

$$\begin{aligned}\vec{r} \perp \vec{a} &\rightarrow \vec{r} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{r} \perp \vec{b} &\rightarrow \vec{r} \cdot \vec{b} = 0 \quad .\end{aligned}$$

Daraus leiten sich zwei Gleichungen zur Berechnung von x und y ab:

$$\begin{aligned}[\vec{a}x + \vec{b}y - \vec{d}] \cdot \vec{a} &= 0 \\ [\vec{a}x + \vec{b}y - \vec{d}] \cdot \vec{b} &= 0 \quad .\end{aligned}$$

Die Ausmultiplizierung beider Gleichungen führt zu:

$$\begin{aligned}0 &= (x - 0.5) \cdot 1 + (0.5x - 2) \cdot 0.5 \rightarrow x = 1.2 \\ 0 &= y \quad .\end{aligned}$$

Der Durchstoßpunkt P durch die Ebene liegt somit bei $x = 1.2$ und $y = 0$. Das heißt, dass die beste Lösung des Gleichungssystems $A \cdot \vec{p} = \vec{d}$ bei $\vec{p} = (1.2; 0)$ liegt.

2.2 Verfahren

Algorithmen der Lokalisierung (Abschnitt 2.1) bilden die mathematische Grundlage der Berechnung des gesuchten Ortes P eines Betrachtungspunkts. Die Verfahren der Lokalisierung beschreiben die Art, wie die Winkel der Triangulation oder die Distanzen der Trilateration und Multilateration bestimmt werden. Ein Verfahren definiert also *Wie* gemessen wird, aber nicht *Womit*. Es wird beispielsweise definiert, dass eine Strecke gemessen wird, aber nicht ob dies mit einem Lineal, einem Maßband oder einem Hodometer (Messrad) erfolgt. Das *Womit* gemessen wird, wird durch das auf einem Verfahren aufbauende Lokalisierungssystem (Abschnitt 3) definiert.

Die Verfahren der Lokalisierung können grob in zwei Kategorien eingeteilt werden: in Verfahren, welche den Ort eines Betrachtungspunkts in einem externen System ermitteln und in Verfahren, wo am Betrachtungspunkt die Ortsbestimmung erfolgt. Im ersten Fall bestimmt ein System, das sich nicht am Ort des Betrachtungspunkts befindet, den Ort des Betrachtungspunkts. Vom Betrachtungspunkt selbst geht kein Einfluss auf die Ortsbestimmung aus und es liegen nach der Ortsbestimmung auch keine Ortskenntnis über den Ort am bestimmten Ort vor. Im zweiten Fall erfolgt die Ortsbestimmung des Betrachtungspunktes direkt am Betrachtungspunkt. Die ermittelten Ortsdaten müssen anschließend an das System übermittelt werden. Beide Kategorien haben ihre gleichberechtigte Bedeutung. Der Einsatzzweck bezie-

hungsweise Einsatzort der Lokalisierung bestimmt, welche der beiden Kategorien die größeren Vorteile aufweist. Beispielsweise ist eine Ortsbestimmung am Betrachtungspunkt beim Navigationsassistenten im Auto günstiger als eine Bestimmung durch ein System. In einem Warenlager ist es im Gegensatz angebrachter, das System die Ortsbestimmung durchführen zu lassen, damit schnell auf die einzelnen Waren zielgerichtet zugegriffen werden kann, ohne dass eine zusätzliche Kommunikation zwischen dem Waren-Objekt und dem System notwendig wird. Damit kann der technische Aufwand für die Lokalisierung im Waren-Objekt gering gehalten werden, wodurch mit den zur Verfügung stehenden Ressourcen, wie zum Beispiel einer Akkulaufzeit, schonend umgegangen werden kann.

In den folgenden Abschnitten werden einige ausgewählte Verfahren der Lokalisierung aufgezählt und kurz in ihrem Wesen skizzenhaft umrissen.

2.2.1 Streckenmessung

Die Streckenmessung ist wohl die älteste aller Messungen. Mit ihr wurde schon früh in der Geschichte der Menschheit die Distanz zwischen dem *Hier* und dem *Dort* bestimmt. Sie gibt im Allgemeinen darüber Auskunft, wie weit zwei Punkte voneinander entfernt sind. Dabei kann die Distanz zum Beispiel als absoluter Wert in Metern angegeben werden oder indirekt über die Zeit, welche benötigt wird, um von dem einen Punkt zum anderen zu gelangen. Beispielsweise als Anzahl von Tagesmärschen oder wie in der Astronomie in Lichtjahren.

2.2.2 Angle-of-Arrival

Bei der Methode *Angle-of-Arrival* (Einfallswinkel) wird die Richtung des Betrachtungspunkts vom Fixpunkt aus bestimmt. Dabei wird, gerichtet von den Fixpunkten zum Betrachtungspunkt, der Winkel in Beziehung zu einer Nullmarke gemessen. Die Nullmarke kann beispielsweise eine Himmelsrichtung sein. Anhand der bestimmten Winkel wird anschließend mittels Triangulation (Abschnitt 2.1.1) der Ort des Betrachtungspunkts berechnet. Die Messung des Winkels durch den Fixpunkt kann aktiv – der Fixpunkt sucht selbst den Betrachtungspunkt, zum Beispiel durch Abtastung eines definierten Bereichs – oder passiv erfolgen. Passiv bedeutet, dass der Betrachtungspunkt Informationen mit Richtcharakteristik an den Fixpunkt übermittelt und dieser daraus den Winkel zum Betrachtungspunkt ableitet.

2.2.3 Time-of-Arrival

Die Methode des *Time-of-Arrival* (Laufzeitmessung) bestimmt den Ort des Betrachtungspunkts über die Messung der verstrichenen absoluten Zeit, die benötigt wird, um ein Signal

zwischen dem Fixpunkt und dem Betrachtungspunkt auszutauschen. Das Signal ist in diesem Zusammenhang als eine Informationseinheit aufzufassen, dass sich mit der bekannten Geschwindigkeit v bewegt. Die Art des Signals beziehungsweise der Informationseinheit ist dabei völlig frei. Die Distanz s (Gleichung (2.11)) wird dann anhand der verstrichenen Zeit t_s vom Start des Signals am Fixpunkt bis zum Eintreffen des Signals am Betrachtungspunkt mit dessen bekannter (vorzugsweise konstanter) Geschwindigkeit v berechnet.

$$s = t_s \cdot v \quad (2.11)$$

Die verstrichene Zeit t_s wird Laufzeit genannt und gibt dem Verfahren seinen Namen. Die Richtung des Signals ist nicht bestimmt. Sie kann sowohl vom Fixpunkt zum Betrachtungspunkt als auch entgegengesetzt ausgerichtet sein. Das Verfahren des Time-of-Arrival kann somit beiden Kategorien der Lokalisierung zugeordnet werden. Mit einer Distanzbestimmung zwischen zwei, drei oder mehreren Fixpunkten und einem Betrachtungspunkt, kann anschließend mittels der Trilateration der Ort des Betrachtungspunkts auf einer Geraden, in der Ebene oder im Raum berechnet werden. Die bekanntesten Vertreter, die das Time-of-Arrival Verfahren nutzen, sind das Global-Positioning-System [25] und GALILEO [13].

2.2.4 Time-Difference-of-Arrival

Das Verfahren des *Time-Difference-of-Arrival* (Laufzeitunterschiedsmessung) misst im Gegensatz zum Verfahren des Time-of-Arrival nicht die absolute Laufzeit des Signals zwischen den Fixpunkten und dem Betrachtungspunkt, sondern die Differenzen der absoluten Laufzeiten. Die Art des Signal ist wie bei dem Verfahren des Time-of-Arrival ebenfalls frei bleibend. Das Verfahren des Time-Difference-of-Arrival ist ein Vertreter beider Kategorien. Sind ausreichend viele Laufzeitdifferenzen bestimmt, wird anschließend mit dem Algorithmus der Multilateration der Ort des Betrachtungspunkts berechnet. Das Verfahren des Time-Difference-of-Arrival wird beispielsweise zur Lokalisierung im GSM/UTMS-Netz eingesetzt.

2.2.5 Cell-of-Origin

Das Verfahren des *Cell-of-Origin* (Rasterlokalisierung) verwendet eine Struktur mit voneinander scharf abgegrenzten Zellen. Der Ort des Betrachtungspunkts wird als "in der Zelle befindlich" angegeben. Eine allgegenwärtige Zellstruktur sind zum Beispiel die Räume eines Gebäudes. Das Verfahren bestimmt, in welchem Raum des Gebäudes sich der gesuchte Betrachtungspunkt befindet. Es ist somit ein hauptsächlicher Vertreter der Kategorie 1 der Lokalisierung: Das System bestimmt den Ort des Betrachtungspunktes.

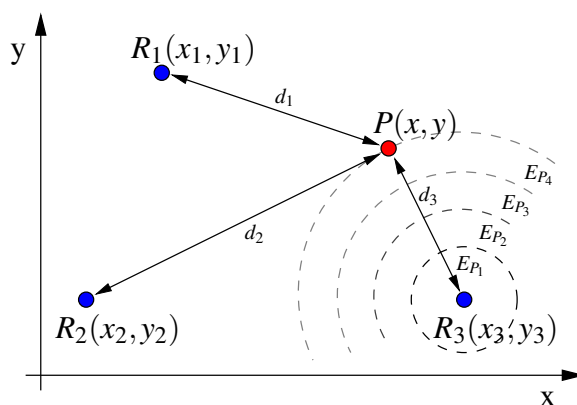


Abbildung 2.6: Fingerprint in einer 2D-Umgebung.

2.2.6 Fingerprint

Das Fingerprint-Verfahren [24] (auch Referenzpunktverfahren genannt) ist im Gegensatz zu den bereits beschriebenen Verfahren ein ausschließlich auf elektromagnetische Signale spezialisiertes Verfahren zur Bestimmung von Distanzen. Trotz seiner Spezialisierung wird es bei den Verfahren der Lokalisierung eingeordnet, da verschiedene Lokalisierungssysteme (Abschnitt 3) dieses Verfahren in unterschiedlicher Weise umsetzen. Das Fingerprint-Verfahren leitet aus der Empfangsleistung eines elektromagnetischen Signals die Distanz zwischen dem Fixpunkt und dem Betrachtungspunkt ab und berechnet aus den Distanzen verschiedener Punkt-zu-Punkt-Kombinationen mit dem Algorithmus der Trilateration den Ort P des Betrachtungspunktes (Abbildung 2.6) oder legt für einen festgelegten Bereich eine Referenzwerttabelle (Empfangsleistung zu Punkt P) an. Die beste Übereinstimmung in der Referenzwerttabelle identifiziert dann während der Lokalisierung den Ort des Punktes P . Die dazu notwendigen Referenzwerte werden im Vorfeld der Lokalisierung in einer Kalibrierungsphase bestimmt und gespeichert. Der Raum zwischen den Fixpunkten wird in dieser Phase praktisch einer Kartografierung unterzogen. Die Distanzbestimmung mittels Empfangsleistung, im englischen Sprachraum auch *Received-Signal-Strength-Indication* (RSSI) genannt, wird beispielsweise bei Sensornetzwerken oder RFID-Anwendungen (Radio Frequency Identification) eingesetzt.

Die Messung der Empfangsleistung leitet sich aus der emittierten Strahlungsleistung P_s eines idealen isotropen Kugelstrahles mit der Wellenlänge λ her. Der isotrope Kugelstrahler ist eine hypothetische, verlustfreie Quelle (im allgemeinen eine Antenne), die in alle Richtungen des Kugelraumes gleichmäßig abstrahlt und im Abstand d eine winkelunabhängige Leistungsdichte S erzeugt. Es wird zur Herleitung der Empfangsleistung auf den isotropen Kugelstrahler auf Grund seiner einfachen mathematischen Beschreibung und der sich daraus ergebenden Feldbetrachtungen zurückgegriffen. Weiterhin wird angesetzt, dass sich die Strahlungsleistung P_s im Fernfeld (Grenzbereich mit der Distanz 4 mal Wellenlänge λ vom

Kugelstrahler) homogen auf einer Kugeloberfläche A_K verteilt. Unter der Berücksichtigung eines richtungsabhängigen Antennengewinns G_S (Maß für die Richtwirkung und den Wirkungsgrad einer Antenne) [26] für reale Strahler folgt für den Abstand d vom Sender für die herrschende Leistungsdichte S [43] auf der Kugeloberfläche:

$$S = \frac{P_S \cdot G_S}{A_K} = \frac{P_S \cdot G_S}{4\pi d^2} \quad . \quad (2.12)$$

Der Empfänger entnimmt mit seiner Antenne der Fläche $A_E = \lambda^2/(4\pi)$ und einem Gewinn G_E aus diesem Energiestrom die Empfangsleistung P_E :

$$P_E = S \cdot G_E \cdot A_E = P_S \cdot G_S \cdot G_E \cdot \frac{\lambda^2}{(4\pi d)^2} \quad . \quad (2.13)$$

Das umgekehrt proportionale Verhältnis zwischen der Empfangsleistung P_E und dem Abstand d kann zur Lokalisierung mittels Trilateration genutzt werden, sofern dem Empfänger die Sendeleistung P_S bekannt ist. Mit anderen Worten: die Empfangsleistung P_E fällt mit dem Quadrat des Abstands d^2 ab.

Eine Möglichkeit die Sende- und Empfangsleistung zu beschreiben, ist mit dem dimensionslosen RSSI-Wert gegeben. Er stellt allerdings nur ein relatives Maß dar. Darüber hinaus steht der RSSI-Wert auch nicht in einer allgemein gültigen funktionalen Beziehung der Form $\text{RSSI} = f(P_E)$ zur Empfangsleistung, sondern kann vielmehr nur in tabellarischer Form angegeben werden. Dieser Umstand führt zur eingangs erwähnten Kartografierung des Raumes zwischen den Fixpunkten.

Es ist zu beachten, dass die beschriebenen Sachverhalte nur im Fernfeld einer Antenne (respektive des isotropen Kugelstrahlers) und im Freiraum zwischen zwei Antennen (Quelle und Senke) gelten. Wird die Fernfeldgrenze der Antenne unterschritten oder die Ausbreitung im Freiraum durch Signalabschottung an Hindernissen, Reflexion oder Absorption gestört, kommt es zu einer Beeinflussung der Empfangsleistung. Die erstellte Karte des RSSI-Werts ist dann nur noch hinreichend genau oder sogar gänzlich fehlerhaft. Besonders in geschlossenen Räumen verursachen sich bewegende Personen ständig ändernde Umgebungsbedingungen. Eine sinnvolle Auswertung des RSSI-Werts ist dadurch stark beeinträchtigt oder sogar ganz unmöglich.

3 Ausgewählte Lokalisierungssysteme

Die Algorithmen und Verfahren der Lokalisierung beziehen sich nicht auf eine bestimmte Anordnung oder Technologie, wie die verschiedenen Größen – Winkel oder Distanz – gemessen werden. Die Algorithmen bauen darauf auf, dass die gegebenen Größen, wie Winkel oder Distanzen, vorliegen. Bei den Verfahren wird allgemein definiert wie diese Größen gemessen werden. Beispielsweise wird beim Time-of-Arrival die Laufzeit eines Signals bestimmt und daraus die Distanz berechnet. Es bleibt offen, welcher Art dieses Signal ist und wie die Zeit gemessen wird. Ein System der Lokalisierung definiert diese allgemeinen Aussagen und benennt die einzusetzenden Technologien. Somit spezifiziert ein System, welches zum Beispiel auf dem Verfahren des Time-of-Arrival basiert, dass das Signal ein Schallimpuls (zum Beispiel ein einmaliges Klatschen in die Hände) ist und die Laufzeit mit einer mechanischen Stoppuhr gemessen wird. Die in den folgenden Abschnitten beschriebenen Lokalisierungssysteme stellen einen ausgewählten Querschnitt an Systemen für die verschiedenen zum Einsatz kommenden Technologien vor. Dabei wird näher auf Systeme mit elektromagnetischen Signalen oder Ultraschall, bildverarbeitende Systeme und Laser- und Infrarotsysteme eingegangen. In einer abschließenden Gegenüberstellung werden die einzelnen Systeme noch einmal zusammenfassend aufgeführt, um ihre Unterschiede und Gemeinsamkeiten zu benennen.

3.1 Elektromagnetische Systeme

Elektromagnetische Systeme nutzen elektromagnetische Signale zur Bestimmung der Größen: Winkel oder Distanz. Diese Systeme können sowohl kabelgebunden wie auch funkbasiert sein. Für die Distanzmessung kann die Signallaufzeit oder die Signalstärke (auch Empfangsleistung oder Received-Signal-Strength-Indicator (RSSI) genannt), verwendet werden. Die Signalstärke nimmt mit dem reziproken Quadrat der Distanz ($1/s^2$) von der Signalquelle ab und entspricht der Leistung mit der das Signal in der Distanz s gemessen wird. Über die gemessene Signalleistung wird die Distanz zwischen Signalquelle und Betrachtungspunkt berechnet. Elektromagnetische Signale breiten sich in einem Medium mit konstanter Geschwindigkeit v aus. In Luft entspricht diese Geschwindigkeit v annähernd der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum (etwa $3 \cdot 10^8$ m/s). In anderen Medien verringert sich die

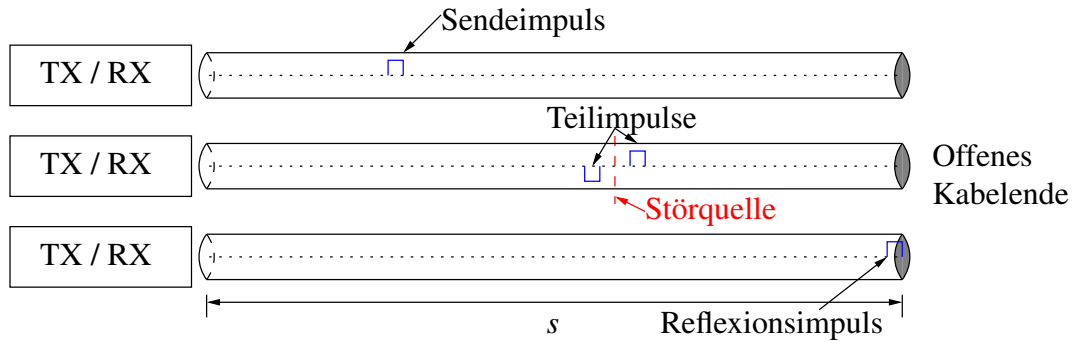


Abbildung 3.1: Zeitbereichsreflektometrie mit Störquellendetektion und Längenmessung.

Geschwindigkeit v gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c . In Abschnitt 8.4 wird näher auf diesen Sachverhalt eingegangen.

Elektromagnetische Signale können sich über die Grenzen verschiedener Medien hinweg ausbreiten. Zum Beispiel können Funkwellen eine Wand durchdringen und dahinter immer noch empfangen werden. Elektromagnetische Signale benötigen somit keine direkte Sichtverbindung zwischen Signalquelle und Empfangspunkt. Zudem können sie sich in Abhängigkeit der Signalfrequenz und Sendeleistung über große Reichweiten (vorzugsweise in Luft oder im Vakuum) ausbreiten. Weiterhin ist mit geeigneten Antennenanordnungen, wie zum Beispiel Antennenarrays [26], auch eine Detektierung der Empfangsrichtung möglich.

Alle im folgenden beschriebenen Systeme, bis auf die Zeitbereichsreflektometrie und die Phasenmessung, sind ausschließlich Funksysteme. Die Zeitbereichsreflektometrie dagegen lokalisiert Stör- und Bruchstellen auf elektrischen Leitungen und misst deren Länge. Systeme auf Basis von elektromagnetischen Signalen nutzen häufig die Verfahren des Angel-of-Arrival, des Time-of-Arrival oder des Time-Difference-of-Arrival.

Zeitbereichsreflektometrie

Mit der Zeitbereichsreflektometrie [11, 12] werden Kabellängen gemessen oder Störquellen, zum Beispiel Bruchstellen, lokalisiert. Hierzu wird ein Impuls ausgesendet und die Laufzeit gemessen, bis der Impuls auf Grund der Reflexion am Kabelende oder an der Störquelle wieder empfangen wird. Mit der bekannten Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{VKF} für das ausgemessene Kabel (siehe Abschnitt 8.4) berechnet sich die Gesamtlänge des Kabels beziehungsweise der Ort (die Lage im Kabel) der Störquelle mit:

$$s = \frac{v_{VKF} \cdot t}{2} \quad . \quad (3.1)$$

Die Zeitbereichsreflektometrie ermöglicht aber noch mehr als nur die Bestimmung der Kabellänge. Auf Grund der oft auftretenden Impedanzänderung an der Störstelle, ist auch auf

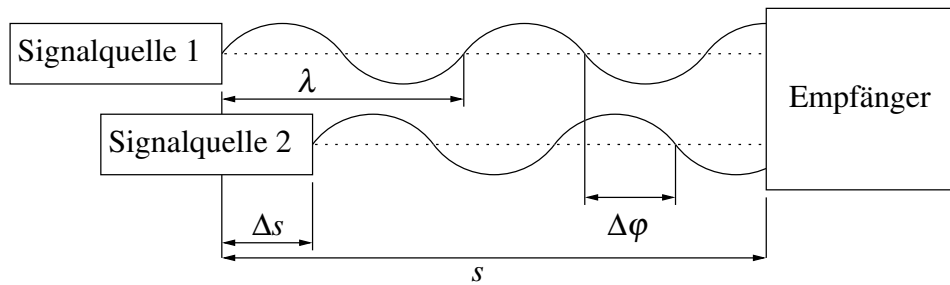


Abbildung 3.2: Phasenmessung für zwei synchronisierte Signalquellen.

das Ausmaß der Störquelle zurück zu schließen. Bei einem vollständigem Kabelbruch kommt es an der Störstelle zu einer Totalreflexion. Liegt beispielsweise eine Quetschung vor, tritt nur eine Teilreflexion auf und der empfangene Reflexionsimpuls ist in seiner Amplitude gedämpft. Abbildung 3.1 zeigt den Fall der Teilreflexion an einer Störstelle und der Totalreflexion an einem offenen Kabelende. Die Zeitbereichsreflektometrie verwendet das Time-of-Arrival Verfahren und mit entsprechenden Zeitmessverfahren [23] werden Genauigkeiten unter 1 mm erreicht.

Phasenmessung

Bei der Phasenmessung wird die Phasenverschiebung zwischen zwei Signalen gemessen. Dies kann sowohl kabelgebunden als auch funkbasiert erfolgen, wodurch ein Betrachtungspunkt im Kabel oder zwischen zwei Sendern lokalisiert werden kann. Abbildung 3.2 zeigt eine Differenzmessung mit zwei synchronisierten Signalquellen und einem Distanzunterschied Δs kleiner der Wellenlänge λ des verwendeten Signals. Ist der Distanzunterschied Δs größer der Wellenlänge λ ergibt sich aus dem Vielfachen N ganzer Wellenlängen λ und dem Wellenreststück $\Delta \lambda$ der Distanzunterschied Δs :

$$\Delta s = N \cdot \lambda + \Delta \lambda \quad . \quad (3.2)$$

Das Wellenreststück $\Delta \lambda$ und die Mehrdeutigkeit N sind zu bestimmen. Die Phasenverschiebung $\Delta \varphi$ zwischen zwei Wellen lässt sich heute bereits mit hoher Auflösung bestimmen. Der integrierte Schaltkreis AD8302 von Analog Devices bietet beispielsweise eine Auflösung von 10mV/Grad in einem Bereich von 0° bis 180° . Aus der Phasenverschiebung $\Delta \varphi$ ist mit:

$$\Delta \lambda = \frac{\Delta \varphi}{2\pi} \cdot \lambda \quad (3.3)$$

das Wellenreststück $\Delta \lambda$ leicht zu berechnen. Schwieriger ist die Lösung der Mehrdeutigkeit N . Entweder muss durch zusätzliche Methoden die Mehrdeutigkeit aufgelöst werden oder der betrachtete Messbereich muss kleiner der Wellenlänge λ sein. Für eine detailliertere

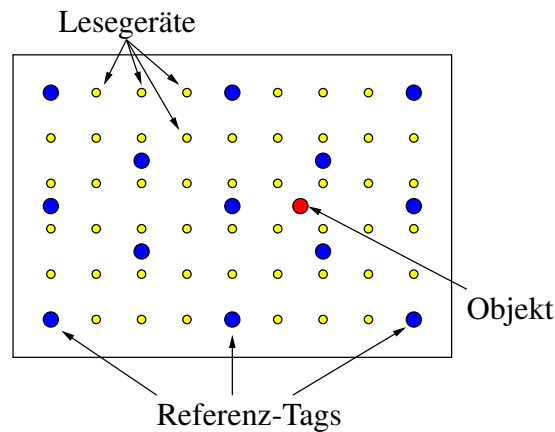


Abbildung 3.3: Das Landmarc-System.

Beschreibung zur Lösung von Mehrdeutigkeiten sei auf die einschlägige Literatur zu diesem Thema verwiesen.

RFID

Das *Radio-Frequency Identification* System (Identifizierung mit Funk) [16, 18] beschreibt die berührungslose Identifikation durch Funksignale (elektromagnetische Signale in Luft oder im Vakuum). RFID-Systeme bestehen aus einer Lesestation und Transpondern. Die Transponder können aktiv, mit eigener Stromversorgung, oder passiv durch drahtlose Energieversorgung über die Lesestation versorgt sein. Die im Passivmodus übertragene Energie wird direkt aus dem Sendesignal der Lesestation gewonnen und zur Verarbeitung des Signals sowie Rücksendung der Antwort genutzt. Die RFID-Technologie arbeitet mit verschiedenen Frequenzen und Frequenzbändern. Sie nutzt das Frequenzband 125–134 kHz oder die Frequenzen 13.56 MHz, 27.12 MHz, 433 MHz, 868 MHz, 915 MHz oder 2.4 GHz.

Mit der RFID-Technologie wird keine Lokalisierung im klassischen Sinne durchgeführt. Die Ortungsgenauigkeit einer Lokalisierung liegt bei etwa 5 m. Sie ist damit insbesondere für eine Lokalisierung in geschlossenen Räumen nicht praktikabel. Die RFID-Technologie ermöglicht somit nur die Verfolgung [39] der Transponder anhand von Wegpunkten (passieren von Bereichen verschiedener Lesegeräte). Mit ihr wird hauptsächlich eine Lokalisierung nach dem Verfahren des Cell-of-Origin (Abschnitt 2.2.5) durchgeführt.

Ein Beispiel (Abbildung 3.3) für die Nutzung der RFID-Technologie ist das Landmarc-System [37]. Es verwendet aktive RFID-Tags (Tags mit eigener Stromversorgung). Die Lebensdauer wird unter günstigen Bedingungen, abhängig von Umgebungstemperatur und Batterietyp, mit bis zu zehn Jahren angegeben. Das Landmarc-System nutzt eine Gitterstruktur von stationären Lesegeräten. Die verwendeten Lesegeräte erlauben es nicht, die Stärke des Empfangssignals auszulesen. Dafür wird die Sendestärke der Lesegeräte in mehreren Stufen

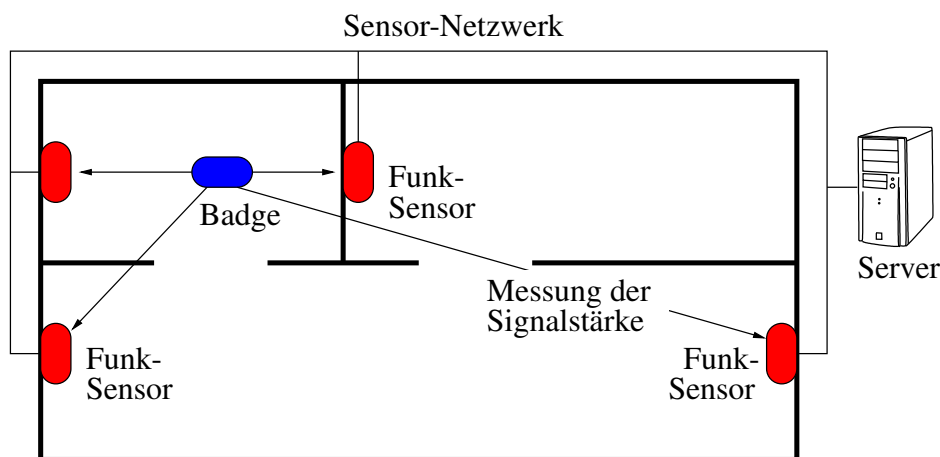


Abbildung 3.4: Das SpotON System.

erhöht. Gemessen wird die Sendestärke, bei welcher ein Tag zum ersten Mal erkannt wird. Da der Sendepiegel durch Veränderung in der Umgebung beeinflussbar ist, werden zusätzliche fest in der Gitterstruktur der Lesegeräte installierte Referenz-Tags herangezogen, deren Orte bekannt sind. Mittels des „*k-Nearest-Neighbour*“-Algorithmus [14] wird der Ort des mobilen RFID-Tags näherungsweise bestimmt. Eine exakte Ortsbestimmung ist auf Grund der sich oft ständig ändernden Umgebungseinflüsse auf den Sendepiegel nicht möglich.

Andere Arbeiten auf diesem Gebiet [32] streben den Aufbau eines analogen Systems zum Landmarc-System nur mit passiven RFID-Tags an. Der Vorteil eines passiven RFID-Tags gegenüber seinem aktiven Pendant ist die Unabhängigkeit einer Stromversorgung, wodurch sich die Verwendung und vor allem die Wartung des Tags und die Kosten für den Tag erheblich reduzieren.

SpotON

Das *SpotON*-System [39, 21] misst die Empfangsleistung der mobilen Sender (Badge) mit im Gebäude angebrachten Funkempfängern (Abbildung 3.4). Die Reichweite oder die Distanz der Badges zum Empfänger ist begrenzt und wird durch den Pegel der detektierbaren Empfangsleistung im Empfänger bestimmt. Die gemessene Empfangsleistung wird an einen Server weitergeleitet und dort ausgewertet. Bei der Berechnung wird davon ausgegangen, dass die Signalstärke des elektromagnetischen Signals mit dem Quadrat der Distanz abfällt (Abschnitt 2.2.6). Bei einer Verdoppelung der Distanz zwischen Sender und Empfänger beträgt die Signalstärke anschließend nur noch ein Viertel des vorherigen Wertes. Auf den Wert der Signalstärke haben allerdings auch noch andere Faktoren wie zum Beispiel Hindernisse, Störungen oder Variationen der Sendeleistung des Senders Einfluss, so dass keine präzise Bestimmung des Ortes des mobilen Senders möglich ist. Es wird versucht die entstehenden

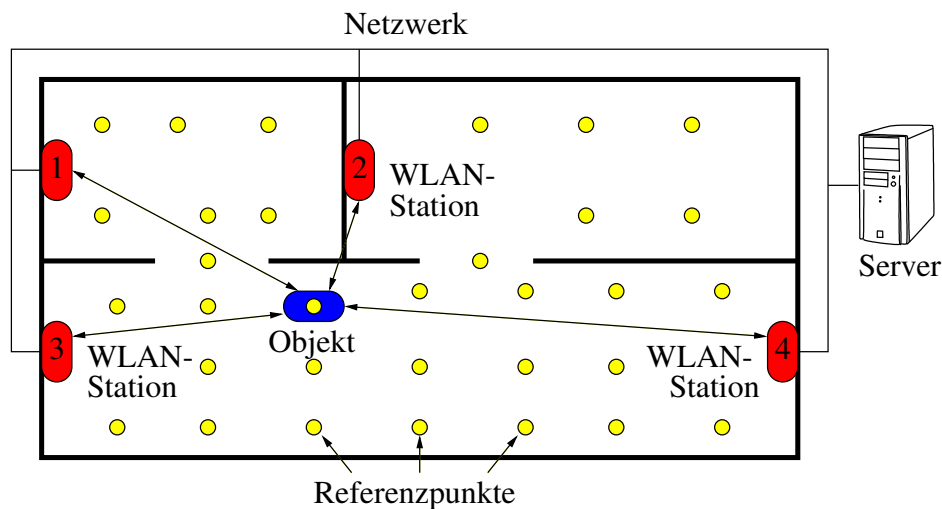


Abbildung 3.5: Das RADAR-System.

Fehler zu kompensieren, indem die Daten mehrerer Empfänger mit in die Berechnung des Ortes einfließen. Das SpotOn-System erreicht eine Genauigkeit von etwa 3–4 m. Werden die Empfänger in mehreren Höhenebenen angebracht, ist eine 3D-Ortsbestimmung möglich.

RADAR

RADAR [5], nicht mit dem klassischen Radar (Radio Detection and Ranging) [33] zu verwechseln, basiert auf Tabellen von Signalstärke-Fingerabdrücken (Abbildung 3.5) und ist ein Vertreter des Fingerprint-Systems (Abschnitt 2.2.6). Es wurde von der Firma Microsoft als reine Softwarelösung entwickelt und nutzt die vorhandene Infrastruktur von WLAN-Zugangspunkten (Access-Points, WLAN-Stationen). Das mobile Endgerät sendet in regelmäßigen Abständen ein Ortsmesssignal, das von den in der Umgebung befindlichen Zugangspunkten gemessen wird. Die Zugangspunkte sollten so angeordnet sein, dass sich ihre Empfangsbereiche überlappen und somit eine optimale Ortung ermöglichen. Das System muss vor der Benutzung trainiert werden. Die einzumessende Fläche „wird so weit möglich“ flächendeckend eingemessen. Zu jedem Messpunkt werden die durch die Zugangspunkte gemessenen Signalstärken in einer Tabelle eingetragen (Tabelle 3.1). Die Tabelle enthält somit zu jedem Messpunkt $P(x,y)$ einen spezifischen Wert der Empfangsleistung für jeden Zugangspunkt. Experimente haben gezeigt, dass die Ausrichtung φ der mobilen Endgeräte Einfluss auf die Messergebnisse nehmen. Daher werden die Messungen in unterschiedlichen Ausrichtungen vorgenommen. Wenn jetzt der Ort eines mobilen Endgeräts bestimmt wird, führt das System eine Messung der Signalstärke WS_i für alle WLAN-Stationen durch. Danach wird die Referenzwerttabelle nach demjenigen Eintrag durchsucht, der der Messung am „ähnlichsten“ ist. Für die Lokalisierung der mobilen Endgeräte wurde über einer Flä-

Tabelle 3.1: Referenzwerttabelle des RADAR-Systems.

x in m	y in m	φ in $^\circ$	WS ₁ in dBm	WS ₁ in dBm	WS ₁ in dBm	WS ₁ in dBm
1.0	3.5	0	20	10	18	25
2.0	3.0	90	25	15	17	25
2.5	3.0	90	15	18	16	16
2.5	1.5	180	6	35	18	20

che von 43 x 22 m mit 70 Wegpunkten eine Genauigkeit von etwa 2–3 m erreicht [5]. Von Vorteil ist die Benutzung einer bestehenden Infrastruktur von WLAN-Zugangspunkten, wodurch relativ geringe Kosten für die Umsetzung des Lokalisierungssystems entstehen. Der große Nachteil des Systems sind die aufwendige Trainingsphase und der Einfluss von Störungen auf die Empfangsleistung. Beispielsweise, wenn sich eine oder mehrere Personen im selben Raum bewegen, führt dies bereits zu einer sich ändernden Empfangsleistung ein und derselben Quelle.

Ubisense

Das *Ubisense*-System [45] der Firma Ubisense nutzt die Ultra-Breitband-Funktechnologie (UWB) für ein 3D-Ortungssystem. Ultrabreitband verwendet Frequenzen zwischen 30 MHz und 10.6 GHz mit einer Bandbreite von bis zu 500 MHz. Das System selbst verwendet das Frequenzband zwischen 5.8–7.2 GHz und besteht aus den drei Komponenten: batteriebetriebenen Tags (mobile Endgeräte) zur Erzeugung der UWB-Ortungsimpulse, fest installierten Empfängern und einer zentralen Systemplattform zur Bestimmung der Ortsinformationen der mobilen Endgeräte und zur Kommunikation mit einem übergeordneten IT-System. Das Ubisense-System der Serie 7000 erreicht bei optimalen Bedingungen eine Ortungsgenauigkeit von etwa 15 cm in 95% aller Fälle [42]. Andere Arbeiten zu diesem Thema [10] geben eine ausrichtungsabhängige Genauigkeit der Tags zu den Empfängern mit etwa 25 cm bis 50 cm an. Nachteilig an diesem System sind die hohen Kosten von über 10 000 € sowie die notwendige und sehr aufwendige Kalibrierung des Systems, so dass sich der Einsatz aus ökonomischer Sicht nur im Einzelfall rechtfertigen lässt. Das Ubisense-System verwendet die Verfahren Angle-of-Arrival (Abschnitt 2.2.2) und Time-Difference-of-Arrival (Abschnitt 2.2.4) zur Bestimmung der mobilen Endgeräte (Tags).

3.2 Ultraschallsysteme

Ultraschallsysteme nutzen Schall mit Frequenzen oberhalb des Hörfrequenzbereichs des Menschen und umfassen Frequenzen ab etwa 16 kHz. In Gasen und Flüssigkeiten breitet sich Ultraschall nur als Longitudinalwelle aus. In den folgenden Ausführungen wird aus-

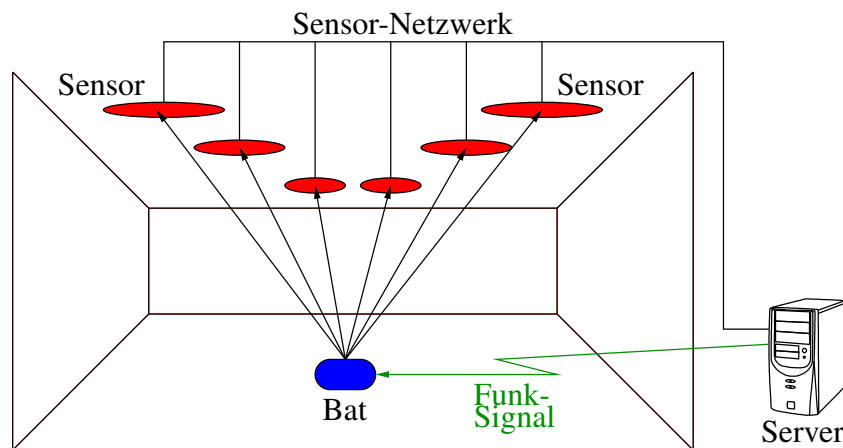


Abbildung 3.6: Das Active Bat System.

schließlich von einer Ausbreitung in Luft ausgegangen, da eine Lokalisierung im alltäglichen Leben hauptsächlich hier erfolgt. Ultraschall erreicht eine Ausbreitung von etwa 10–12 m und besitzt eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von etwa 343 m/s. Die Reichweite und Geschwindigkeit sind abhängig vom Luftdruck und der Lufttemperatur.

Active Bat

Beim *Active-Bat*-System [47, 39] wird vom mobilen Endgerät (Bat genannt) auf Anforderung ein Ultraschallimpuls ausgesendet (Abbildung 3.6). Zur Anforderung des Ultraschallimpulses sendet der Server ein Funksignal an das Endgerät, worauf dieses den Ultraschallimpuls abgibt. Der Server wählt immer nur ein mobiles Endgerät aus, so dass keine Kollisionen auftreten können. Der Ultraschallimpuls wird von den Empfängern (Sensoren) aufgenommen, die an der Decke in einem Raster von 1.2 m angebracht sind. Wird der Ultraschallimpuls von den Sensoren empfangen, leiten sie diese Information an den Server weiter. Anhand der gemessenen Zeiten zwischen dem Aussenden des Funksignals und dem Erhalt der Empfangsinformationen von den Sensoren berechnet der Server anschließend den Ort des mobilen Endgeräts nach dem Verfahren des Time-of-Arrival (Abschnitt 2.2.3). Die Signallaufzeit des Funksignals mit etwa $3 \cdot 10^8$ m/s ist gegenüber der Schallgeschwindigkeit von etwa 343 m/s vernachlässigbar, so dass die gemessene Zeit vollständig als Laufzeit des Ultraschallimpulses gesetzt wird. Damit der Server immer nur ein mobiles Endgerät anspricht, besitzt jedes Endgerät einen individuellen *Globally Unique Identifier* (eindeutiger Identifikator). Das vom Server ausgesendete Funksignal enthält diesen Identifikator, woraufhin nur das angesprochene mobile Endgerät den Ultraschallimpuls abgibt.

Das Active-Bat-System benötigt eine verhältnismäßig umfangreiche Infrastruktur, die hohe Kosten verursacht und nur schwer erweiterbar ist [20]. Die Kosten für einen Sender und

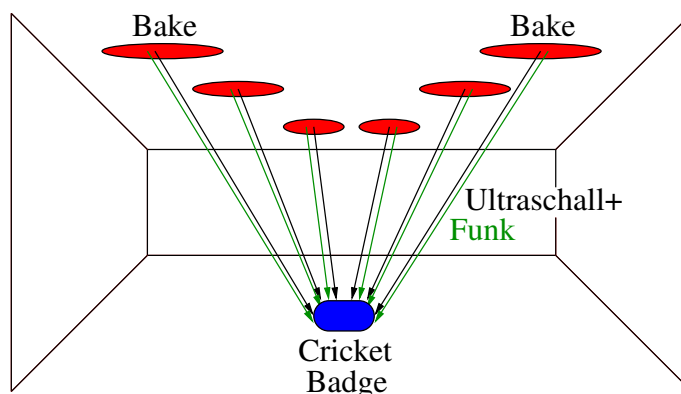


Abbildung 3.7: Das Cricket System.

einen Empfänger sind jeweils mit etwa 5–7 € zu kalkulieren. Für einen Konferenzraum mit einer Grundfläche von 10 x 10 m werden bei einem Rastermaß von 1.2 m etwa 64 Sender benötigt. Andererseits erreicht das System eine Genauigkeit kleiner 5 cm.

Cricket

Das *Cricket*-System [6] verwendet wie das Active Bat System eine Kombination aus Radio- und Ultraschalltechnologie, um den Ort des mobilen Endgeräts anhand von Laufzeitmessungen nach dem Verfahren des Time-of-Arrival (Abschnitt 2.2.3) zu ermitteln. Im Gegensatz zum Active Bat sind nun die Sender (Baken) in einem symmetrischen Raster an der Raumdecke angeordnet und das mobile Endgerät (Badge) ist der Empfänger. Dieses Vorgehen hat mehrere Vorteile:

- die Berechnung des Ortes erfolgt beim Empfänger direkt und das System kann leicht auf neue Benutzer skaliert werden und
- es wird kein zentraler Server zur Verarbeitung der Ortsdaten benötigt.

Die Deckensender senden in regelmäßigen Abständen gleichzeitig ein Funk- und ein Ultraschallsignal aus. Das Funksignal wird als Startsignal der Laufzeitmessung genutzt. Das Ultraschallsignal stoppt die Laufzeitmessung wieder. Anhand der gemessenen Laufzeiten von verschiedenen Sendern berechnet der Empfänger die Distanzen zu den Sendern und ermittelt daraus seinen Ort. Da die Empfänger (mobile Endgeräte) nicht zentral gesteuert werden, ist das Cricket-System robust im Fall des Defekts eines Empfängers. Wie das Active-Bat-System benötigt auch das Cricket-System eine umfangreiche kostenintensive Infrastruktur. Die Kosten für einen Sender und Empfänger sind jeweils mit etwa 5–7 € zu kalkulieren. Für einen Konferenzraum mit einer Grundfläche von 10 x 10 m werden bei einem Rastermaß von 1.2 m ebenfalls 64 Sender benötigt. Dafür skaliert das System wesentlich besser in der Anzahl der möglichen mobilen Endgeräte und erreicht eine Genauigkeit von etwa 1–2 cm.

iLOC

Mit dem *iLOC*-System [28] existiert ein vergleichbares System zum Cricket-System. Es ist wesentlich jüngeren Datums und mit neueren technischen Möglichkeiten (Stand 2009) für Systeme dieser Art aufgebaut und erreicht derzeit eine Genauigkeit von etwa 10 cm. Das in [28] beschriebene System wurde in einem Raum mit etwa 32 m Länge, 10 m Breite und 2 m Höhe aufgebaut. Der Aufbau des Systems bestand aus 70 Referenzknoten (Ultraschall-Empfänger) und 20 Tags (mobile Endgeräte). Die maximale Distanz zwischen Sender und Empfänger für die Lokalisierung wird mit etwa 5 m angegeben. Derzeit benennt das Team die Kosten für einen Tag mit etwa 150 € ohne die Kosten für Hardware- und Softwareentwicklung. Ein Tag hat eine Größe von 85 mm x 55 mm x 13 mm (Breite x Höhe x Länge) und erreicht eine Batterielebensdauer von 2-3 Tagen.

3.3 Infrarotsysteme

Ein Infrarot-System stellt eine weitere Variante zur Lokalisierung dar. Durch die Eigenschaft massive Gegenstände nicht zu durchdringen, ist sehr einfach eine Zellstruktur in der Form von Zimmern eines Gebäudes aufgebaut. Durch die geringe Reichweite des Infrarotsignals können sich Infrarotsender nur stören, wenn sie sich in unmittelbarer Nähe befinden. Die Reichweite schränkt aber die erzielbare Zellgröße ein. Von Vorteil ist, dass die Infrarotkommunikation unempfindlich gegenüber elektromagnetischen Störungen ist, wie sie durch Maschinen oder Funksendern entstehen können. Die Infrarottechnik hat aber den Nachteil, dass Umgebungslicht oder direktes Sonnenlicht den Empfang stören können. Darüber hinaus sollte möglichst immer eine direkte Sichtverbindung zwischen dem Sender und den Sensoren bestehen.

Active Badge

Das *Active-Badge*-System [46] bestimmt den Ort mittels zellulärer Näherungsmessung. Jedes mobile Endgerät ist mit einem frei sichtbaren Infrarotsender (Badge = Abzeichen) ausgestattet, welcher in regelmäßigen Abständen von 15 s für etwa 0.1 s ein Infrarotsignal aussendet (Abbildung 3.8). In dem Signal ist eine Benutzererkennung kodiert, welche von einem installierten Sensornetzwerk aufgenommen und ausgewertet wird. Der Ort wird als innerhalb einer Zelle bestimmt und liegt nur dem System vor. Das mobile Endgerät (Bagde) kennt somit seinen Ort selbst nicht. Das gesamte Verfahren beruht darauf, dass sich die Infrarotsignale nur im Raum ausbreiten. Innerhalb des Raumes wird durch Reflexion an den Wänden sichergestellt, dass auch Signale mobiler Endgeräte ohne direkte Sicht auf den Sensor empfangen

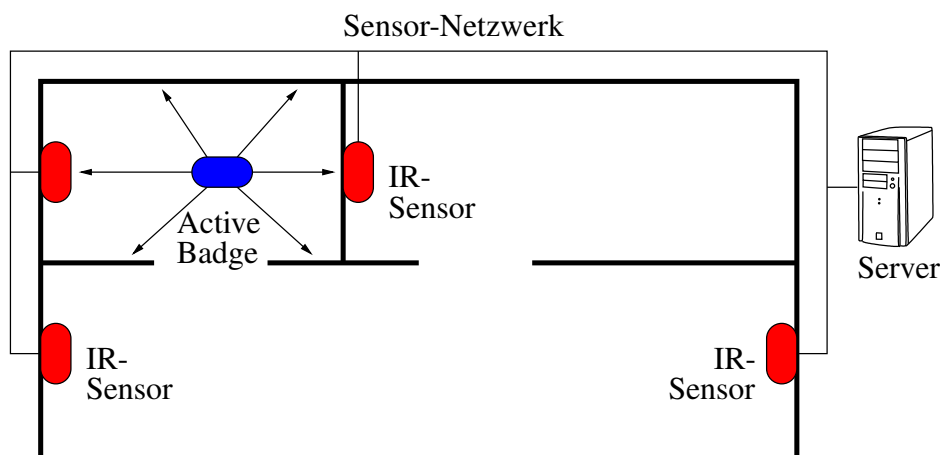


Abbildung 3.8: Das Active Badge System.

werden. Ein Server des Sensornetzwerks sammelt alle Sensorinformationen und bietet diese für andere Anwendungen zur Abfrage an. Diese können über ein Netzwerk abfragen, welche Person sich gerade in welchem Raum befindet oder welche Personen sich nicht im Gebäude aufhalten.

Das System ist ein Vertreter des Cell-of-Origin-Verfahrens (Abschnitt 2.2.5). Die erreichbare Genauigkeit entspricht der Größe einer Zelle. Von Vorteil für das System sind die hohe Verfügbarkeit und die geringen Kosten für Infrarotgeräte, sowie die gute Skalierbarkeit hinsichtlich der Anzahl von Badges im System. Nachteilig sind die gekoppelte Genauigkeit an die Zellgröße (Raumgröße) und die Abhängigkeit von der Batterielebensdauer. Es wird Energie für die Infrarotimpulse und die zusätzliche Möglichkeit des Austauschs von Nachrichten benötigt. Durch eine optimierte Impulsdauer und optimierte Impulsintervallzeiten sowie limitierten Nachrichtenaustausch werden trotzdem Batterielebenszeiten von etwa einem Jahr erreicht. Mehrere Active Badges im selben Raum stören sich sehr selten, da die Wahrscheinlichkeit für eine Kollision sehr gering ist. Durch geringe Abweichungen in der Impulsintervallzeit von 15 s wird erreicht, dass selbst bei Kollisionen nach kurzer Zeit die Signale nicht mehr synchron ausgesendet werden. Die Reichweite des Infrarotsignals ist stark von den Umgebungsbedingungen abhängig, kann aber mit etwa 6 m angegeben werden. Die geringe Reichweite erfordert insbesondere bei größeren Räumen, zum Beispiel Hörsälen, mehrere Sender für eine flächendeckende Abdeckung. Die Kosten für einen Sender sind etwa bei 5 € anzusetzen.

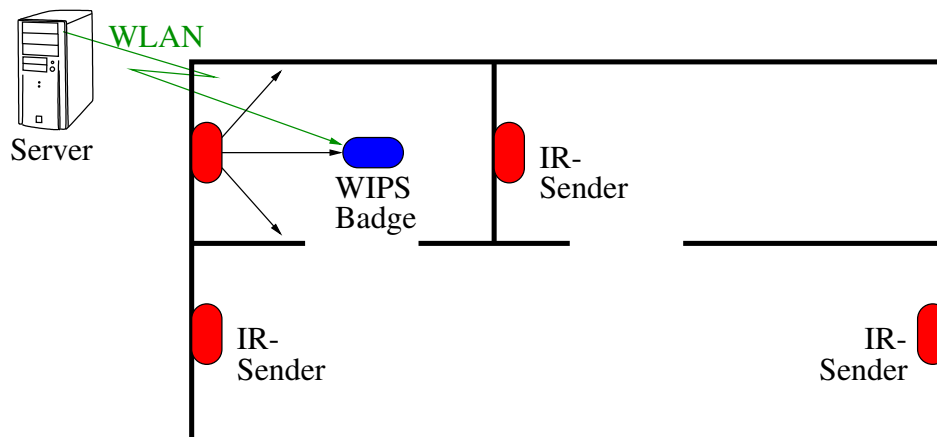


Abbildung 3.9: Das Wireless Indoor Positioning System.

Wireless Indoor Positioning System

Das *Wireless Indoor Positioning System* [39] (WIPS) nutzt ein zum Active Badge umgekehrtes Verfahren. Die Sender sind fest installiert und ihre Signale werden von den mobilen Endgeräten (Empfängern) aufgenommen (Abbildung 3.9). Die Ortungsinformationen werden von den Empfängern an einen Server übermittelt, zum Beispiel über WLAN. Die aufbereiteten Ortungsinformationen werden anschließend vom Server wieder an den Empfänger zurück übertragen. Die Empfänger sind im Vergleich zum Active Badge wesentlich komplexer aufgebaut, da sie neben dem Infrarotempfänger auch noch eine WLAN-Kommunikationseinheit benötigen. Demgegenüber steht die einfachere Installation der Infrarotsender. Sie sind in dem System die passiven Elemente. Eine aufwendige Vernetzung wie beim Active Badge entfällt, wodurch das System leichter zu erweitern ist. Aber auch hier korreliert die Genauigkeit der Lokalisierung mit der Zellgröße (Raumgröße). Das Konzept von WIPS erlaubt die Realisierung anspruchsvoller Anwendungen auf der Basis ortsbezogener Dienste, da Badges und Server direkt miteinander kommunizieren. Die direkte Kommunikation ermöglicht neben dem Austausch der Ortsinformationen einen umfangreichen Austausch von weiteren Daten. Die Komplexität des Systems, die Anzahl an Sendern, Reichweite des Infrarotsignals (etwa 6 m) und die Kosten für einen Sender (etwa 5 €) sind vergleichbar mit dem Active-Badge-System.

3.4 Lasersysteme

Mit einem Laser können die Distanzen sowohl über die Laufzeit als auch die Phasendifferenz gemessen werden, womit Genauigkeiten im einstelligen Millimeterbereich erreicht werden. Aufgrund der Richtungscharakteristik des Laserstrahls werden sowohl ein direkter Sichtkon-

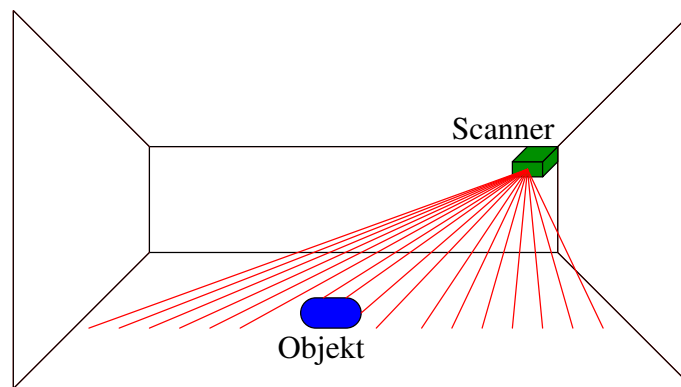


Abbildung 3.10: Laser Range Finder.

takt sowie eine *präzise* Ausrichtung von Sensor und Aktor benötigt. Dies erfordert für sich bewegende Objekte ein kontinuierliches Nachverfolgen oder ein zyklisches Abtasten der Umgebung. Mit den gemessenen Distanzen wird nach dem Verfahren der Streckenmessung und dem Algorithmus der Trilateration der Ort des Objekts bestimmt.

Laser Range Finder

Der Laser (Klasse 1) des *Laser-Range-Finder*-Systems (Laserscanner) [22] tastet in einem Erfassungswinkel von 180° bis 360° seine Umgebung ab und misst die Laufzeit zwischen dem Aussenden des Lasersignals und dem Empfang seiner Reflexion. Zur Messung der Laufzeit muss das Objekt in der Lage sein, Laserlicht gerichtet zum Scanner zu reflektieren. Die Distanzmessung erreicht bei einer Reichweite von bis zu 80 m eine Genauigkeit von 5 mm. Laserscanner sind für schnelles Scannen mit Messraten von > 1000 Punkten pro Sekunde konzipiert. Entsprechend sind nicht nur die Sensoren auf Schnelligkeit ausgelegt, sondern auch die Aktoren, also im Wesentlichen die Antriebe für möglichst kleine bewegte Massen. Anstelle kompletter Fernrohre richten Ablenkspiegel den Zielstrahl aus. Durch die fehlende Zieleinrichtung sind keine echten, reproduzierbaren Einzelpunktmessungen möglich. Es werden aus den einzelnen gemessenen Punkten Flächen gebildet, die anschließend zur Modellierung des Objekts genutzt werden. Laserscanner, insbesondere Panoramascanner oder 3D-Scanner, sind mit Kosten über 10 000 € sehr preisintensiv.

3.5 Bildverarbeitungssysteme

Optische Verfahren bestimmen den Ort und die Ausrichtung von Objekten durch die Auswertung von Bildern beziehungsweise Fotos. Allerdings ist dieser Ansatz für Systeme mit einer hohen Flexibilität hinsichtlich der Ortung verschiedener Objekte nicht praktikabel. Die

zu lokalisierenden Objekte müssen a priori spezifiziert sein. Einzelne Objekte können fälschlicherweise als die zu lokalisierenden Objekte erkannt werden und es muss direkter Sichtkontakt bestehen, wodurch eine Erkennung von verdeckten Objekten unmöglich wird.

Photogrammetrie

Die Photogrammetrie [30] hat ihre Wurzeln in der Geodäsie und bedeutet traditionell *Messen aus Fotos*. Für den Einsatz der Photogrammetrie sind eine Reihe von Voraussetzungen zu schaffen. Neben ausreichender Beleuchtung und genügend Kontrast muss vor allem freie Sicht zwischen Kamera und Objekt bestehen. Insbesondere letzteres ist in sich dynamisch verändernden Szenarien oft nicht ohne weiteres möglich. Die Photogrammetrie ist also ein passives Vermessungsverfahren (berührungslose Vermessung), welches die räumliche Lage eines Objekts direkt aus einem Foto rekonstruiert. Grundsätzlich basiert die Photogrammetrie auf den Gesetzen der Zentralprojektion. Sind der Bildpunkt des Objekts und das Projektionszentrum (vorzugsweise Bildmitte) auf dem Foto sowie alle relevanten Kameraparameter (Standort, Blickrichtung, Objektivbrennweite, Linsenverzeichnung) bekannt, berechnet sich der Ort des Objekts nach dem Strahlensatz in der Ebene. Mit einem räumlichen Vorwärtsschnitt [29] lassen sich anschließend auch aus den Bildkoordinaten die 3D-Koordinaten des Objekts berechnen, wenn mindestens zwei Fotografien eines Objekts aus unterschiedlichen Richtungen aufgenommen wurden. Ob die Aufnahmen gleichzeitig mit mehreren Kameras oder sequentiell mit einer Kamera erfolgen, spielt dabei für das Prinzip keine Rolle. Die Photogrammetrie erreicht Auflösungen und Genauigkeit im Millimeterbereich. Allerdings ist eine vollständige Bildauswertung nicht trivial und erfordert einen hohen Rechenaufwand.

Visuelle Marken

Das System der *Visuellen Marke* [41] stellt für sich nur eine Spezialisierung der Photogrammetrie dar. Die Lokalisierung der mobilen Endgeräte erfolgt analog dem Vorgehen der Photogrammetrie. Bei diesem System werden jedoch gezielt definierte Marken erkannt und nur diese berücksichtigt. Dazu wird das mobile Endgerät mit einer visuellen Marke ausgestattet. Die Marke muss gut erkennbar am mobilen Endgerät angebracht sein und kann beispielsweise aus leicht zu erkennenden Mustern wie roten und grünen Quadraten bestehen. Die Anordnung der Quadrate erlaubt es, einfache Informationen für eine Identifikation zu dekodieren. Wenn die Marken eine feste Größe besitzen, sind die Distanzen zur Kamera sowie die Ausrichtung im Raum berechenbar. Katalenic et al. [27] geben für ihr System eine Genauigkeit von etwa 10 cm an. Hauptsächlich ist die Genauigkeit aber von der Auflösung der verwendeten Kamera abhängig.

3.6 Gegenüberstellung

Tabelle 3.2 stellt noch einmal die oben beschriebenen Systeme der Lokalisierung anhand des verwendeten Verfahrens, der eingesetzten Technologie und der erzielbaren Genauigkeit einander gegenüber. Die aufgeführten Angaben zu Genauigkeit, Reichweite und Kosten sind teilweise Schätzungen, da einige Systeme nicht als vollständige Lösungen verfügbar sind (Prototyp oder experimentelle Aufbauten) oder genaue Angaben nicht ermittelt werden konnten. In diesen Fällen wurden die Angaben auf Grund der Eigenschaft der verwendeten Techniken und erhältlicher kommerzieller Produkte, zum Beispiel einfacher Ultraschallsender, geschätzt.

Tabelle 3.2: Vergleich der Systeme zur Lokalisierung.

System	Medium	Verfahren	Genauigkeit	Reichweite	Kosten
Zeitreichs-reflektometrie	EM-Signal	Time-of-Arrival	< 1 mm	> 100 m	ca. 300 € ^a
Phasenmessung RFID	EM-Signal Funk	Time-Difference-of-Arrival Cell-of-Origin	< 1 mm Zellgröße	> Kilometer ^b max. 5–7 m (aktiv) < 1 m (passiv)	< 1–2 €/Trag 20–30 Cent/Tag
SpotON	Funk	Fingerprint	3–4 m	< 1 m	Accesspoints > 10 000 €
RADAR	Funk	Fingerprint	2–3 m	100 m	
Ubisense	Funk	Time-Difference-of-Arrival	15 cm	50 m	
Active Bat	Ultraschall	Angel-of-Arrival Time-of-Arrival	< 5 cm	10 m	5–7 €/Sender 5–7 €/Empfänger
Cricket	Ultraschall	Time-of-Arrival	1–2 cm	10 m	s. Active Bat
iLOC	Ultraschall	Time-of-Arrival	10 cm	5 m	150 €/Sender
Active Badge	Infrarot	Cell-of-Origin	Zellgröße	< 6 m	ca. 5 €/Sender
WIPS	Infrarot	Cell-of-Origin	Zellgröße	< 6 m	ca. 8 €/Tag
Laser Range Finder	Laser	Time-of-Arrival	5 mm	< 200 m	> 10 000 €
Photogrammetrie	Optisch	Streckenmessung	wenige Millimeter	Kilometerbereich	Abhängig von Ka- merasystem
Visuelle Marken	Optisch	Streckenmessung	10 cm	30–50 m	Abhängig von Ka- merasystem

^aFluke TS100 Cable Fault Finder^bSiehe Phasenverschiebung bei GPS.

4 Ausgewählte physikalische Grundlagen

Als Vorbereitung auf das eigentliche Thema präsentiert dieses Kapitel eine Kurzfassung des physikalischen Effekts der Schwebung. Eine Schwebung entsteht, wenn sich zwei Signale mit charakteristischen „Schwebungseigenschaften“ überlagern. Der Effekt der Schwebung bildet die Grundlage der LSB-Methode, des Themas dieser Arbeit. Das Kapitel gibt einen Überblick zur Schwebung, wie sie entsteht und ihrer nutzbaren Eigenschaften zur Lokalisierung. Es wird darauf eingegangen, wie die Schwebung für die Lokalisierung einsetzbar ist, welche Vorteile sie bietet und welche Randbedingungen für ein Lokalisierungssystem bestehen.

4.1 Schwebung

Aus der Physik ist bekannt, dass die Superposition (additive Überlagerung) zweier Signale der Form $s_1(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t)$ und $s_2(t) = A_2 \sin(2\pi f_2 t)$ mit ähnlichen Frequenzen $f_1 \approx f_2$ aber $f_1 \neq f_2$ zu einem resultierenden Signal $r(t)$ führen, welches als Schwebung [19] bezeichnet wird (Abbildung 4.1):

$$r(t) = s_1(t) + s_2(t) \quad .$$

Die Superposition der beiden Signale $s_1(t)$ und $s_2(t)$, mit der Vereinfachung $A_1 = A_2 = 1$, erzeugt ein Signal mit einer Trägerfrequenz f_T und einer Schwebungsfrequenz f_S :

$$f_T = (f_1 + f_2)/2 \quad \text{Trägerfrequenz,} \quad (4.1)$$

$$f_S = (f_1 - f_2)/2 \quad . \quad \text{Schwebungsfrequenz} \quad (4.2)$$

Für die beiden Frequenzen f_1 und f_2 gilt im weiteren ohne Beschränkung der Allgemeinheit:

$$f_1 > f_2 \quad . \quad (4.3)$$

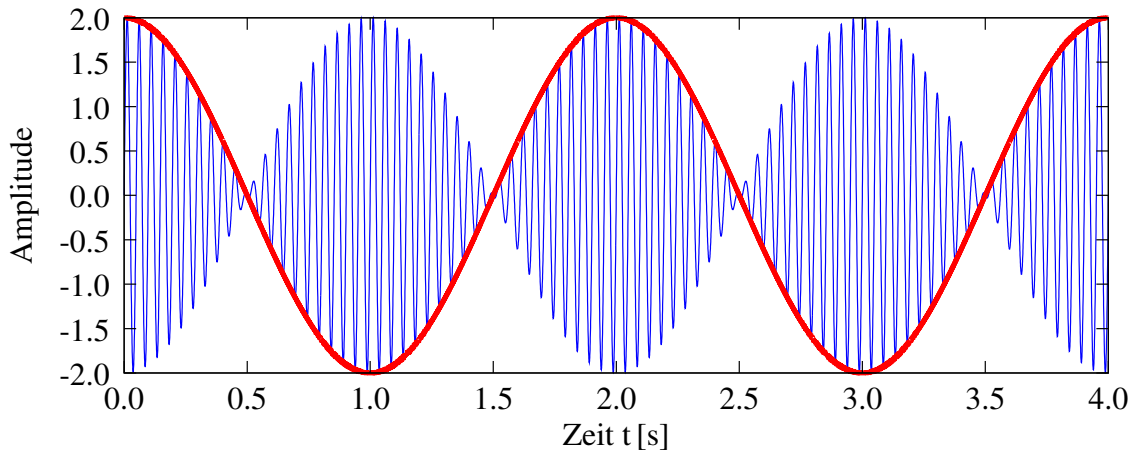


Abbildung 4.1: Schwebungen (—) und Einhüllende (—) zweier Sender.

Die Trägerfrequenz f_T und die Schwebungsfrequenz f_S leiten sich aus der Addition trigonometrischer Funktionen nach dem folgenden Additionstheorem [7] ab:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = \underbrace{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}_{\text{Einhüllende}} \underbrace{\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}_{\text{Träger}} . \quad (4.4)$$

Der Anteil der Einhüllenden aus Gleichung (4.4) ist die veränderliche Amplitude des eigentlichen Signals des Trägers:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = \underbrace{\left(\underbrace{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}_{\text{Einhüllende}} \right)}_{\text{Amplitude}} \underbrace{\left(\underbrace{\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}_{\text{Träger}} \right)}_{\text{Signal}} .$$

Bezogen auf die beiden Signale $s_1(t)$ und $s_2(t)$ entsteht aus Gleichung (4.4) als Schwebung das Superpositionssignal $r(t)$:

$$\begin{aligned} r(t) &= 2 \cdot \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right) \sin\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right) \\ &= \underbrace{2 \cdot \cos(2\pi f_S t)}_{\text{Einhüllende}} \underbrace{\sin(2\pi f_T t)}_{\text{Träger}} . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Einhüllende mit ihrer Schwebungsfrequenz f_S liegt nur imaginär vor. Sie ist nicht als spektraler Anteil des Signals $r(t)$ vorhanden. Eine Schwebung ist also ein Signal mit einer sich periodisch ändernden Amplitude. Da bei der Entstehung der Schwebung die Frequenzen f_1 , f_2 , f_T und f_S über die Gleichungen (4.1) und (4.2) miteinander verknüpft sind, ist eine

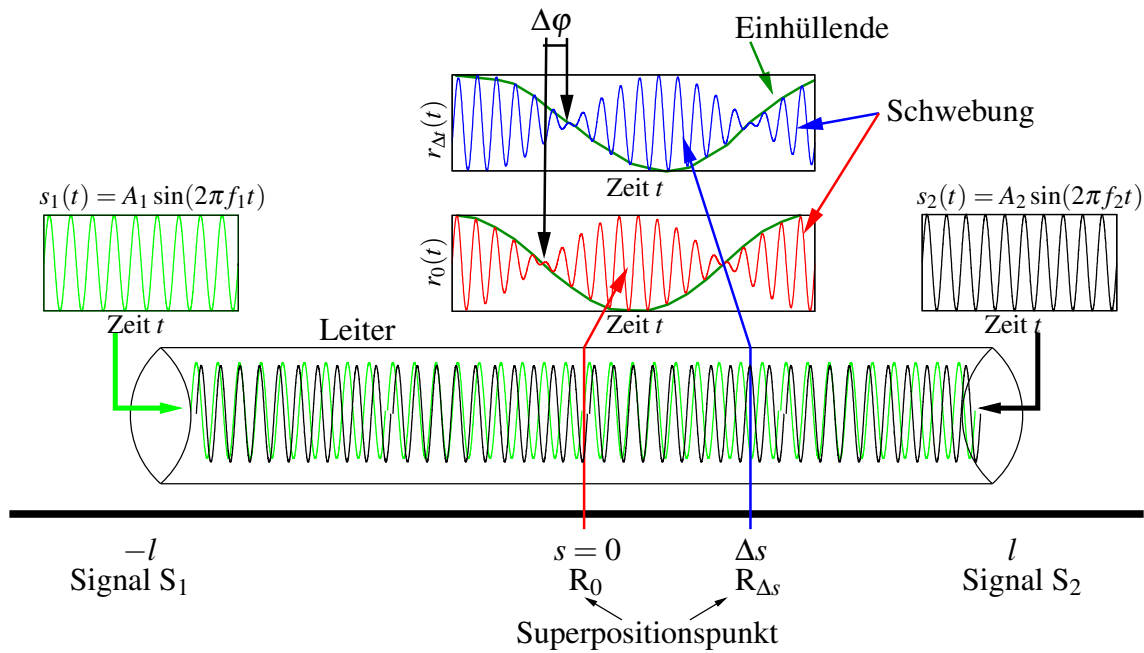


Abbildung 4.2: Symbolische Darstellung der Entstehung der Phasenlage φ zweier Schwebungen für unterschiedliche Superpositionspunkte.

Schwebung auch über die Definition der Trägerfrequenz f_T und der Schwebungsfrequenz f_S beschreibbar. Für eine gegebene Trägerfrequenz f_T und einer gegebenen Schwebungsfrequenz f_S ergeben sich konstruktiv die beiden Frequenzen f_1 und f_2 der Signale $s_1(t)$ und $s_2(t)$ mit:

$$f_1 = f_T + f_S \quad \text{und} \quad (4.6)$$

$$f_2 = f_T - f_S \quad . \quad (4.7)$$

In der Akustik ist die Schwebung deutlich zu hören: Erklingen zwei Töne, deren Frequenzen sich nur wenig unterscheiden, so ist ein Ton zu hören, dessen Frequenz (Trägerfrequenz) dem Mittelwert der Frequenzen (f_1 und f_2) der beiden überlagerten Töne entspricht. Dieser Ton ist moduliert, seine Lautstärke schwankt mit der Differenz der Frequenzen, der Schwebungsfrequenz. Übersteigt der Frequenzunterschied etwa fünf Prozent, wird ein Ton mit rauher Klangfärbung vernommen, der sich bei weiterer Vergrößerung der Frequenzdifferenz in zwei Einzeltöne aufspaltet.

4.2 Phasenlage der Einhüllenden

Abbildung 4.2 veranschaulicht eine Konfiguration aus zwei Signalquellen und zwei unterschiedlichen Superpositionspunkten. Am Superpositionspunkt R_0 überlagern sich die beiden

Signale $s_1(t)$ und $s_2(t)$ wie in Gleichung (4.5) für den Fall $\Delta s = 0$ dargestellt. Weiterhin wird auch eine um $\Delta s \neq 0$ versetzter Superpositionspunkt abgebildet. Das am Superpositionspunkt $R_{\Delta s}$ entstehende Signal $r_{\Delta s}(t)$ weist eine Phasenverschiebung zum Signal $r_0(t)$ am Punkt R_0 um $\Delta\phi$ auf. Aus der Phasenverschiebung $\Delta\phi$ berechnet sich der Distanzunterschied Δs nach:

$$\Delta s = \frac{\Delta\phi \cdot v}{2\pi f_T}$$

mit v für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Signalen (siehe hierzu Abschnitt 8.4) und der Trägerfrequenz $f_T = (f_1 + f_2)/2$.

Die einfachste Methode die Phasenverschiebung $\Delta\phi$ zu messen, ist die *gleichzeitige* Aufzeichnung beider Signale $r_0(t)$ und $r_{\Delta s}(t)$ in einem einzigen Messgerät. Zum Beispiel mit einem Mehrkanal-Oszilloskop oder bei getrennten Aufnahmegeräten mit synchronisierter Zeitbasis und Abtastung. Dazu werden aber stets zwei separate Superpositionspunkte benötigt. Für eine Lokalisierung, wie sie in den vorangegangenen Kapiteln beschrieben wurde, ist dies nicht zweckdienlich. Das System muss beispielsweise einen Referenzpunkt bei $\Delta s = 0$ stellen und die Messungen an den Superpositionspunkten sind mit diesem Referenzpunkt zu synchronisieren. Zwischen dem Referenzpunkt und den Superpositionspunkten ist nun der Distanzunterschied bestimmbar.

Maróti et al. [34] beschreiben ein Funksystem, das mit mindestens 2 Sendern und Empfängern mittels der Einhüllenden der Schwebungssignale die Phasenverschiebung zwischen den Empfängern bestimmt und damit eine Ortsbestimmung durchführt. Alle Sender und Empfänger sind dabei zueinander synchronisiert. Mit einem Netzwerk aus mindestens 8 Knoten ist sogar eine Rekonstruktion des relativen Ortes im dreidimensionalen Raum möglich. In einem Areal von 18 x 18 m wurde eine Genauigkeit des Ortes der mobilen Empfänger von etwa 5 cm erreicht. Beide Empfänger können frei positioniert werden, wenn mindestens zwei Empfänger zur Verfügung stehen. Ein Empfänger für sich alleine ist nicht im Stande, seinen Ort selbst zu bestimmen.

4.3 Vor- und Nachteile

Der Einsatz der Schwebung bietet den Vorteil, dass ein hochfrequentes Trägersignal zur Signalerzeugung und Signalübertragung und ein niederfrequentes Signal zur Bestimmung der Phasenverschiebung genutzt wird. Die niederfrequente Einhüllende ermöglicht eine Auswertung mit einfachem technischen Aufwand. Die Abtastung des Signals kann mit wenigen Kilohertz erfolgen. Auch die Anforderungen an die notwendigen Analog-Digital-Wandler halten sich bei diesen Abtastraten in Grenzen und sind heute Stand der Technik. Auch die Preise für derartige Analog-Digital-Wandler sind heutzutage sehr gering.

Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ ist ohne zusätzliche Hilfsmittel [22] nur innerhalb einer Signalperiode $0 \leq \Delta\varphi \leq 2\pi$ bestimmbar. Vielfache der Periode $n \cdot 2\pi$ werden nicht erkannt. Dadurch hängt der erkennbare maximale Distanzunterschied Δs von der Trägerfrequenz f_T ab:

$$\Delta s = \frac{\Delta\varphi \cdot v}{2\pi f_T} \quad \text{wird zu} \quad \Delta s_{\max} = \frac{v}{f_T} \quad \text{mit} \quad \Delta\varphi = 2\pi \quad .$$

Nur der Träger und nicht die Einhüllende (Gleichung (4.4)) ist die bestimmende Größe der Phasenverschiebung. Die Einhüllende ist Teil der Amplitude des Schwebungssignals.

4.4 Zusammenfassung

Abschließend werden die genannten Parameter Trägerfrequenz f_T , Schwebungsfrequenz f_S und Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ einer Schwebung näher im Kontext der Lokalisierung charakterisiert.

Trägerfrequenz f_T

Die Trägerfrequenz f_T ist der Mittelwert der beiden Frequenzen $(f_1 + f_2)/2$. Eine Erhöhung der Trägerfrequenz f_T führt bei gleichem Distanzunterschied Δs zu einer Vergrößerung der Phasenverschiebung:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s \cdot 2\pi f_T}{v} \quad \text{mit} \quad \Delta\varphi \sim f_T \quad .$$

Eine größere Phasenverschiebung bei gleichem Distanzunterschied erleichtert die messtechnische Bestimmung des Distanzunterschieds. Im theoretischen Sinn ergibt sich, bei gleichem Distanzunterschied für jede Trägerfrequenz über die entsprechende Phasenverschiebung zum Distanzunterschied, wieder dieser Distanzunterschied. Der technischen Bestimmung der Phasenverschiebung sind aber Grenzen gesetzt, so dass größere Phasenverschiebungen leichter zu messen sind als kleinere. Bei kleinen Trägerfrequenz, zum Beispiel bei 1 kHz, ergibt sich für einen Distanzunterschied von $\Delta s = 1$ m eine Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = 1.2^\circ \cdot 10^{-3}$. Eine Frequenz von 100 MHz erzeugt für denselben Distanzunterschied eine Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = 120^\circ$. Somit erzeugen bereits Änderungen des Distanzunterschieds von einigen Zentimetern eine deutlich messbare Änderung der Phasenverschiebung, wenn Trägerfrequenzen größer 100 MHz eingesetzt werden. Für eine Trägerfrequenz von 1 KHz ist die Änderung der Phasenverschiebung möglicherweise technisch nicht messbar (ohne Beweis) oder so klein, dass der bedingte Messfehler größer ist als der Messwert.

Schwebungsfrequenz f_S

Die Schwebungsfrequenz f_S ist die halbierte Differenz der beiden Frequenzen $(f_1 - f_2)/2$. Sie entspricht der Frequenz der implizierten Einhüllenden $\cos(2\pi t[f_1 - f_2]/2)$ aus Gleichung (4.5). Besonders wenn für die Trägerfrequenz f_T hohe Frequenzen (> 100 MHz) eingesetzt werden, ermöglicht die Einhüllende auf Grund ihres niederfrequenten Charakters die Bestimmung der Phasenverschiebungen $\Delta\varphi$ mit geringen technischen Anforderungen. Die Signalabtastung und anschließende Analog-Digital-Wandlung des hochfrequenten Schwebungssignals benötigt dagegen schnell hohe technische Anforderungen. Für eine hinreichend gute Rekonstruktion des Signals und weitere digitale Verarbeitung sollte die Abtastung mit einer Frequenz erfolgen, welche mindestens dem zehnfachen der Signalfrequenz entspricht (Vergleich Nyquist-Shannon Abtasttheorem [17]). Wird nun zu einer Schwebung dessen Einhüllende erzeugt, ist es ausreichend, nur dieses Signal zu diskretisieren. Für die niederfrequente Einhüllende wird nun eine wesentlich geringere Abtastrate benötigt, als es für das Schwebungssignal notwendig ist. Im Allgemeinen sind Abtastraten von einigen Kilohertz völlig ausreichend. Sowohl die Analog-Digital-Wandlung als auch die Erzeugung der Einhüllenden stellt heute keine technische Herausforderung mehr dar und ist mit integrierten Schaltkreisen zu geringen Kosten realisierbar. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Einhüllende das Problem der Bestimmung der Phasenverschiebung zweier hochfrequenter Signale auf die Bestimmung der Phasenverschiebung zweier niederfrequenter Signale transformiert.

Phasenverschiebung $\Delta\varphi$

Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ bestimmt über die Beziehung $\Delta s = (\Delta\varphi \cdot v)/(2\pi f_T)$ den Distanzunterschied Δs der beiden Signalquellen mit den jeweiligen Signalen $s_1(t)$ und $s_2(t)$ (Abbildung 4.2) zueinander. Über die Trägerfrequenz f_T können der maximale Distanzunterschied $\Delta s_{max} = v/f_T$ und die Stärke der Änderung der Phasenverschiebung pro Distanzunterschiedsänderung $\Delta\varphi' = ([\Delta s_1 - \Delta s_2] \cdot 2\pi f_T)/v$ (Auflösung der Distanzunterschiedsbestimmung) gesteuert werden. Wird zum Schwebungssignal die Einhüllende mit der Schwebungsfrequenz f_S erzeugt, ist die Bestimmung der Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ aus einem niederfrequenten Signal möglich. Die Phasenverschiebung ist aber nur durch die Auswertung zweier Schwebungssignale, respektive ihrer Einhüllenden, zweier verschiedener Messpunkte bestimmbar. Es ist nicht möglich für einen einzelnen Messpunkt, ohne weitere Referenzdaten, einen Distanzunterschied oder gar die absoluten Distanzen zu den Signalquellen zu bestimmen.

5 Die LSB-Methode

Die bisherigen Ausführungen zu den Algorithmen und Verfahren der Lokalisierung, einigen ausgewählten Lokalisierungssystemen und physikalischen Grundlagen dienen dazu, einen Rahmen für das Thema dieser Arbeit, die LSB-Methode, zu schaffen. Die LSB-Methode¹ bestimmt den Distanzunterschied zweier Signalquellen zu einem dedizierten Ort, an dem die beiden Signale der Signalquellen superponieren. Dazu nutzt die Methode die im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Vorteile einer Schwebung: hochfrequenter Träger zur Übertragung und Messauflösung sowie die niederfrequente Einhüllende zur Auswertung. Im Detail verwendet sie aufeinander abgestimmte parametrisierte Schwebungen als Ausgangssignale, die es ermöglichen, den Distanzunterschied der Signalquellen zum betrachteten Interferenzpunkt ohne zusätzliche Referenzdaten oder Zeitsynchronisation zu bestimmen. Dieses Kapitel beschreibt die LSB-Methode sowie einige ihrer Eigenschaften.

5.1 Die Schwebungssignale

Die LSB-Methode verwendet zwei Schwebungen (Gleichung (4.5)) als Ausgangssignale der Form:

$$b_1(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_S t) \sin(2\pi f_{T_1} t) \quad \text{und} \quad (5.1)$$

$$b_2(t) = A_2 \cdot \cos(2\pi f_S t) \sin(2\pi f_{T_2} t) \quad (5.2)$$

mit leicht unterschiedlichen Trägerfrequenzen f_{T_1} und f_{T_2} , aber mit *identischer* Einhüllenden $\cos(2\pi f_S t)$. Für die beiden Trägerfrequenzen f_{T_1} und f_{T_2} wird folgende Beziehung definiert:

$$f_{T_1} \approx f_{T_2} \quad \text{aber} \quad f_{T_1} \neq f_{T_2}. \quad (5.3)$$

Die Schwebungsfrequenz f_S der Einhüllenden $\cos(2\pi f_S t)$ ist dagegen bei beiden Schwebungen gleich. Zunächst wird zur Vereinfachung davon ausgegangen, dass die beiden Amplituden A_1 und A_2 insbesondere am Ort der Überlagerung der beiden Signale $b_1(t)$ und $b_2(t)$

¹Das Akronym LSB entsteht aus der englischen Bezeichnung der Methode, die dort *Localization-by-Superposing Beats* (LSB) genannt wird.

gleich sind und den Wert $A_1 = A_2 = 1$ annehmen. Der allgemeine Fall $A_1 \neq A_2 \neq 0$ wird in Abschnitt 12.2 näher untersucht.

5.2 Das Interferenzsignal

Überlagern sich die beiden Schwebungen $b_1(t)$ und $b_2(t)$ an einem Ort $R_{\Delta t}$ entsteht das Interferenzsignal $r_{\Delta t}(t)$:

$$r_{\Delta t}(t) = b_1(t) + b_2(t) \quad . \quad (5.4)$$

Mit den formalen Beschreibungen für $b_1(t)$ und $b_2(t)$ aus Gleichung (5.1) und (5.2) und der Berücksichtigung des Laufzeitunterschieds Δt beider Signale von ihren Quellen zum Interferenzpunkt stellt sich das Interferenzsignal $r_{\Delta t}(t)$ wie folgt dar:

$$r_{\Delta t}(t) = \cos(2\pi f_S(t - \Delta t)) \sin(2\pi f_{T_1}(t - \Delta t)) + \cos(2\pi f_S(t + \Delta t)) \sin(2\pi f_{T_2}(t + \Delta t)) \quad . \quad (5.5)$$

Bei einer Laufzeitdifferenz von $\Delta t = 0$ ist der Interferenzpunkt gleich weit von beiden Signalquellen entfernt. Die Größe der tatsächliche Entfernung ist aber unbestimmt. Eine Laufzeitdifferenz von $\Delta t \neq 0$ benennt also nur den Unterschied des Eintreffens der Signale am Interferenzpunkt R_0 mit $\Delta t = 0$. Mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit für elektromagnetische Signale, der Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s im Vakuum (siehe hierzu Abschnitt 8.4), kann der Laufzeitdifferenz Δt ein Distanzunterschied Δs über die Beziehung:

$$\Delta s = \frac{\Delta t \cdot c}{2} \quad (5.6)$$

zugeordnet werden. Die Laufzeitdifferenz Δt darf nur zur Hälfte in die Berechnung des Distanzunterschieds Δs auf Grund der Distanzunterschiedsänderung des Interferenzpunkts $R_{\Delta t}$ zum Interferenzpunkt R_0 eingehen. Der Distanzunterschied Δs beschreibt somit die Distanz zwischen dem aktuellen Interferenzpunkt $R_{\Delta t}$ und dem Interferenzpunkt R_0 .

5.3 Ortsabhängiges Interferenzmuster

Als Folge der Superposition der beiden Schwebungen $b_1(t)$ und $b_2(t)$ bildet sich am Interferenzpunkt das Interferenzsignal $r_{\Delta t}(t)$ mit einem *ortsabhängigen* Interferenzmuster aus. Abbildung 5.1 zeigt dies beispielhaft für die drei Orte R_0 , $R_{\Delta t_1}$ und $R_{\Delta t_2}$. An diesen drei Orten bilden sich die Schwebungsbäuche B_1 , B_2 und B_3 mit unterschiedlichen Amplituden aus.

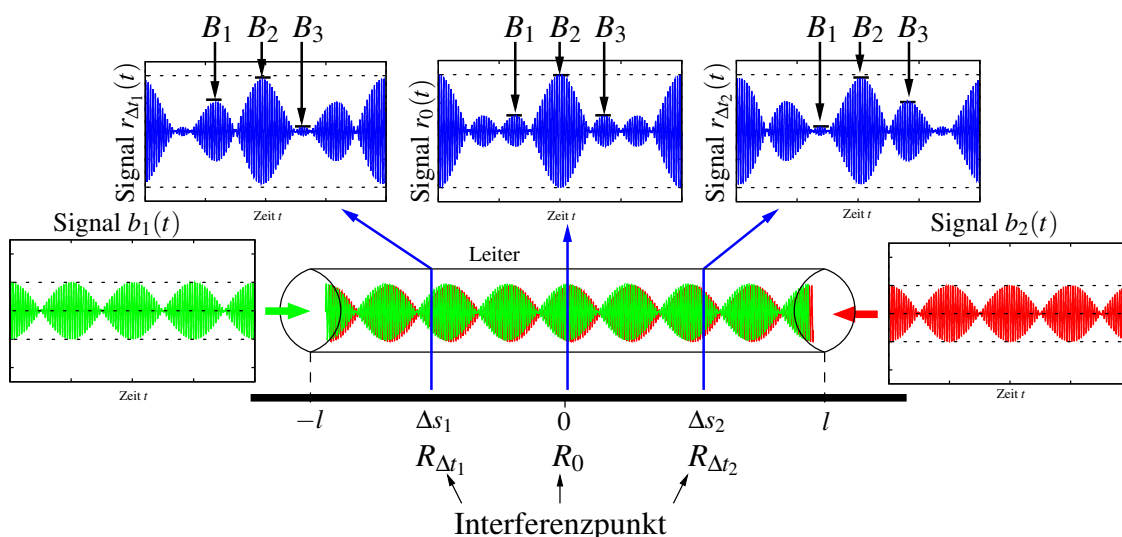


Abbildung 5.1: Ortsabhängige Interferenzmuster der LSB-Methode.

Die Quotienten B_1/B_2 , B_1/B_3 und B_2/B_3 geben somit eine charakteristische Beschreibung der drei Interferenzpunkte wieder. Im Umkehrschluss ist es dadurch am Interferenzpunkt möglich, aus den drei Quotienten den Distanzunterschied Δs abzuleiten. Eine sehr einfache Methode ist, den Bereich zwischen den beiden Signalquellen analog dem Fingerprint-System (Abschnitt 2.2.6) zuerst auszumessen und die Quotienten in Abhängigkeit des Ortes in einer Tabelle einzutragen. Anschließend wird zu den bestimmten Quotienten die beste Übereinstimmung in der Tabelle gesucht und daraus der Interferenzpunkt abgeleitet. Der Distanzunterschied Δs ist aber auch aus dem Interferenzsignal *direkt* berechenbar. Wie der Distanzunterschied Δs aus dem Interferenzmuster berechenbar ist, wird in Abschnitt 11 eingehend beschrieben.

5.4 Hüllkurve des Interferenzmusters

Wie im vorangehenden Abschnitt 5.3 beschrieben, bildet sich durch Überlagerung der beiden Schwebungssignale $b_1(t)$ und $b_2(t)$ am Interferenzpunkt ein ortsabhängiges Interferenzmuster aus und es ist ausreichend, die Amplituden B_i der entstehenden Schwingungsbäuche zur Herleitung des Distanzunterschieds Δs heranzuziehen. Von dieser Betrachtungsweise ausgehend ist schnell die Erkenntnis zu gewinnen, dass die notwendigen Informationen zur Bestimmung des Distanzunterschieds Δs auch in der imaginären Hüllkurve des Interferenzmusters enthalten sind. Abbildung 5.2 zeigt ein Interferenzmuster mit der dazugehörigen Hüllkurve. Deutlich ist zu erkennen, dass die Hüllkurve eine *wesentlich* geringere Frequenz als das Interferenzsignal aufweist. Wird nun vom Interferenzsignal $r_{\Delta t}(t)$ die Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ ermittelt, kann der Distanzunterschied Δs nun anhand dieser niederfrequenten Hüllkurve be-

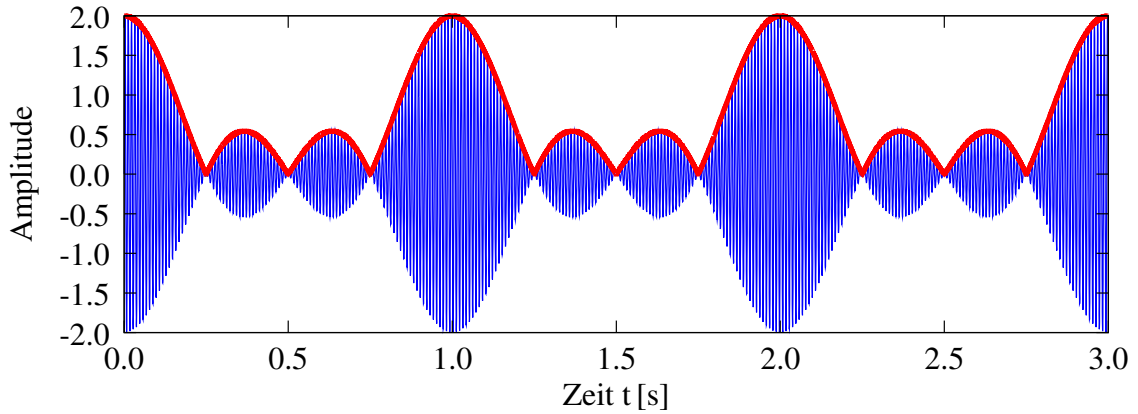


Abbildung 5.2: Hüllkurve (–) eines Interferenzmusters (–).

stimmt werden. Die Signalverarbeitung zum Erhalt der relevanten Informationen zur Distanzunterschiedsbestimmung wird dadurch vom hochfrequenten Interferenzsignal auf die niederfrequente Hüllkurve substituiert. Die Auswertung der Hüllkurve hat den Vorteil, vor allem bei Trägerfrequenzen im Gigahertz-Bereich, dass sie mit einer wesentlich geringeren Abtastrate und somit geringerem technischen Aufwand als das Interferenzsignal digitalisiert werden kann. Auswertungsverfahren, die nicht auf dem Ausmessen des Bereiches zwischen den beiden Signalquellen, wie zum Beispiel dem Fingerprint-System (Abschnitt 2.2.6), basieren, sondern auf der Berechnung des Distanzunterschieds Δs , benötigen eine analytische mathematische Beschreibung der Hüllkurve. In dem nun folgenden Abschnitt wird aus dem Interferenzsignal $r_{\Delta t}(t)$ die Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ hergeleitet.

5.5 Herleitung der Hüllkurven

Unter der Bedingung, dass die Trägerfrequenzen f_{T_1} und f_{T_2} um ein Vielfaches größer sind als die Schwebungsfrequenz f_S (MHz zu Hz), kann bei einer Änderung des Interferenzpunkts um den Betrag eines Distanzunterschieds Δs innerhalb einiger weniger Perioden n der Trägerfrequenzen:

$$\Delta s_{T_1} = n \cdot \frac{c}{f_{T_1}} \quad \text{oder} \quad \Delta s_{T_2} = n \cdot \frac{c}{f_{T_2}} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots, 9, 10 \quad , \quad (5.7)$$

die Auswirkung der Laufzeitdifferenz Δt auf die Einhüllende $\cos(2\pi f_S(t \pm \Delta t))$ der Schwebungen $b_1(t)$ und $b_2(t)$ aus Gleichung (5.5) vernachlässigt werden:

$$r_{\Delta t}(t) = \cos(2\pi f_S(t - \Delta t)) \sin(2\pi f_{T_1}(t - \Delta t)) + \cos(2\pi f_S(t + \Delta t)) \sin(2\pi f_{T_2}(t + \Delta t)) \quad (\text{Wdh. Gl. (5.5)})$$

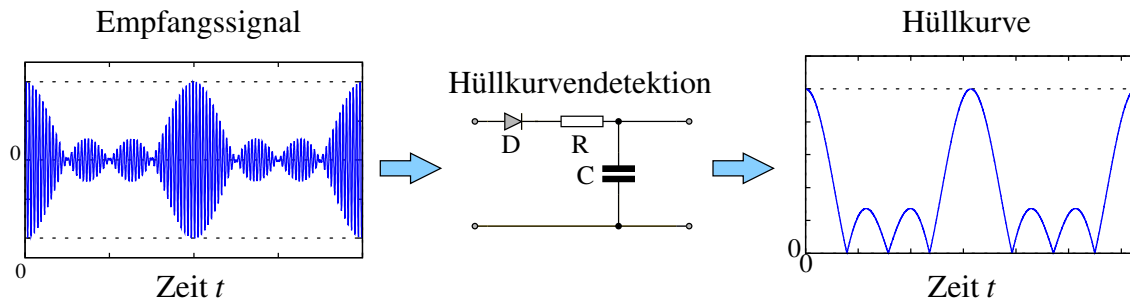


Abbildung 5.3: Schematische Darstellung der Detektion der Hüllkurve durch Gleichrichtung (Diode) und Tiefpassfilterung (R-C-Glied).

und das Interferenzsignal vereinfacht sich damit wie folgt:

$$r_{\Delta t}(t) \approx \cos(2\pi f_s t) [\sin(2\pi f_{T_1}(t - \Delta t)) + \sin(2\pi f_{T_2}(t + \Delta t))] \quad . \quad (5.8)$$

Unter Anwendung des Additionstheorems [7]:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

und den Substitutionen:

$$f_m = f_s \quad , \quad (5.9)$$

$$f_{T_g} = \frac{f_{T_1} + f_{T_2}}{2} \quad \text{und} \quad (5.10)$$

$$f_s = \frac{f_{T_1} - f_{T_2}}{2} \quad , \quad (5.11)$$

wird die Gleichung (5.8) wie folgt umgeformt:

$$r_{\Delta x}(t) \approx 2 \cdot \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t) \sin(2\pi f_{T_g} t - 2\pi f_s \Delta t) \quad . \quad (5.12)$$

Gleichung (5.12) beschreibt somit eine *modulierte* Schwebung:

$$r_{\Delta x}(t) \approx 2 \cdot \underbrace{\cos(2\pi f_m t)}_{\text{Modulator}} \underbrace{\cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t) \sin(2\pi f_{T_g} t - 2\pi f_s \Delta t)}_{\text{Schwebung}} \quad . \quad (5.13)$$

Der Sinus-Anteil aus Gleichung (5.13) ist der hochfrequente Träger der neu entstandenen Schwebung. Dieser Anteil wird nun mit konstant 1 angesetzt. Die durchgeführte Substitution lässt sich sehr anschaulich mit der Wirkungsweise der Tiefpassfilterung des Signals erklären:

$$r_{\Delta x}(t) \approx 2 \cdot \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t) \cdot 1 \quad . \quad (\text{Tiefpassfilterung})$$

Der Kosinus-Anteil entspricht der Hüllkurve der Schwebung mit der Schwebungsfrequenz f_s . Um nun ausschließlich die positive Hüllkurve zu erhalten, entsprechend Abbildung 5.2, wird der Betrag der Funktion gebildet. Diese Substitution entspricht der Gleichrichtung (Abbildung 5.3) des Signals:

$$r_{\Delta t}(t) \approx |2 \cdot \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t)| \quad . \quad (\text{Gleichrichtung})$$

Aus dem Interferenzsignal $r_{\Delta t}(t)$ (Gleichung (5.12)) entsteht mit diesen Substitutionen die Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$:

$$\begin{aligned} r_{\Delta t}(t) &\Rightarrow \tilde{r}_{\Delta t}(t) && (\text{Überführung}) \\ \tilde{r}_{\Delta t}(t) &= |2 \cdot \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t)| \quad . && (5.14) \end{aligned}$$

Die Hüllkurve (Gleichung (5.14)) des Interferenzsignals $r_{\Delta t}(t)$ setzt sich somit nun aus den zwei niederfrequenten Anteilen mit der Modulationsfrequenz f_m und der Schwebungsfrequenz f_s zusammen. Die Schwebungsfrequenz f_s (Gleichung (5.11)) setzt die beiden hochfrequenten Trägersignale f_{T_1} und f_{T_2} auf eine niederfrequente Frequenz um. Weiterhin enthält die Hüllkurve die Phase $\Delta\varphi = 2\pi f_{T_g} \Delta t$. Diese Phase besitzt ein wichtiges Merkmal der LSB-Methode. Sie ist zwar Bestandteil des niederfrequenten Schwebungsanteils, wird aber durch die hochfrequente *globale* Trägerfrequenz f_{T_g} bestimmt. Eine ausführliche Beschreibung der Phase $\Delta\varphi$ wird im Abschnitt 6.1 gegeben. Der entstehende Fehler ε auf Grund der Vereinfachung:

$$\cos(2\pi f_m(t \pm \Delta t)) \approx \cos(2\pi f_m t) \quad \text{mit} \quad f_m = f_s \quad (5.15)$$

ist im Mittel das Verhältnis der Modulationsfrequenz f_m zu den Trägerfrequenzen f_{T_i} :

$$\varepsilon = \frac{f_m}{\frac{f_{T_1} + f_{T_2}}{2}} = \frac{f_m}{f_{T_g}} \quad . \quad (5.16)$$

Bei einem angenommenen Verhältnis von *einigen Hz* zu *einigen MHz* ist der Fehler $\varepsilon \leq 10^{-6}$.

5.6 Zusammenfassung

Wie in den vorherigen Abschnitten beschrieben, verwendet die LSB-Methode zwei Schwebungen mit jeweils unterschiedlichen Trägerfrequenzen f_{T_i} aber gleicher Schwebungsfrequenz f_s . Die Superposition dieser beiden Schwebungen am Interferenzpunkt führt zu einem ortsabhängigen Interferenzmuster. Daraus wird rückwirkend der Unterschied der Distanzen

vom Interferenzpunkt zu den beiden Signalquellen abgeleitet. Es wurde weiterhin gezeigt, dass es für die Auswertung des Interferenzmusters ausreichend ist, die niederfrequente Hüllkurve des hochfrequenten Interferenzsignals zu nutzen. Die analytische Beschreibung der Hüllkurve verdeutlicht nachhaltig die Wirkungsweise und vor allem die Haupteigenschaft der LSB-Methode. Mit der LSB-Methode können Distanzunterschiede im Bereich von Zentimetern und Millimetern, in Abhängigkeit des hochfrequenten Trägersignals, durch die Auswertung der niederfrequenten Hüllkurve bestimmt werden. Für die LSB-Methode kann festgehalten werden: Je größer die Trägerfrequenz, desto feiner ist auch der durch die niederfrequente Hüllkurve bestimmbare Distanzunterschied. Die LSB-Methode wird durch die drei Parameter:

- Globale Trägerfrequenz $f_{T_g} = (f_{T_1} + f_{T_2})/2$,
- Schwebungsfrequenz $f_s = (f_{T_1} - f_{T_2})/2$ und
- Modulationsfrequenz f_m

eindeutig charakterisiert. Aus ihnen werden rückwirkend alle notwendigen Frequenzen für die Erzeugung der beiden Schwebungssignale $b_1(t)$ und $b_2(t)$ hergeleitet. In den anschließenden Abschnitten wird auf diese drei Parameter näher eingegangen und aufgezeigt, wie ihre Beziehungen zueinander das Interferenzmuster und somit die Bestimmung des Distanzunterschieds beeinflussen.

6 Eigenschaften der LSB-Methode

Im vorherigen Kapitel wurde nur davon gesprochen, dass sich bei der LSB-Methode ein ortsabhängiges Interferenzmuster am Ort der Superposition der beiden Schwebungssignale $b_1(t)$ und $b_2(t)$ ausbildet. Das sich an diesem Ort ausbildende *Grund*-Interferenzmuster hängt von dem Verhältnis der Modulationsfrequenz f_m zur Schwebungsfrequenz f_s ab. Dieses charakteristische Interferenzmuster wiederholt sich weiterhin periodisch über die Zeit im Interferenzsignal. Die zeitliche Länge der Periode des Interferenzmusters wird ebenfalls durch das Verhältnis der Modulationsfrequenz zur Schwebungsfrequenz bestimmt. In den folgenden Abschnitten wird auf die Parameter der LSB-Methode, das Verhältnis der Modulationsfrequenz zur Schwebungsfrequenz und die sich daraus ergebenden Auswirkungen auf das Interferenzmuster und die Musterperiode näher eingegangen.

6.1 Globale Trägerfrequenz

Ein wichtiges Merkmal der Hüllkurve (Gleichung (5.14)) ist der Phasenwinkel $\Delta\varphi = 2\pi f_{T_g} \Delta t$ des Schwebungsanteils.

$$\tilde{r}_{\Delta t}(t) = | 2 \cdot \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t) | \quad (\text{Wdh. Gl. (5.14)})$$

Der Phasenwinkel ist zwar Bestandteil des niederfrequenten Schwebungsanteils, wird aber durch die globale Trägerfrequenz f_{T_g} (Gleichung (5.10)) bestimmt. In Abhängigkeit der Trägerfrequenz f_{T_g} können auch kleine Distanzunterschiede Δs von Zentimetern oder Millimetern eine deutliche Phasenänderung $\Delta\varphi$ des niederfrequenten Schwebungsanteils hervorrufen. Eine Trägerfrequenz von $f_{T_g} = 100 \text{ MHz}$ erzeugt bereits bei einer Verlagerung des Interferenzpunkts um etwa $\delta s \approx 8 \text{ mm}$ eine Phasenänderung von $\Delta\varphi \approx 1^\circ$. Diese Phasenänderung wirkt sich bereits signifikant auf die Änderung des Interferenzmusters und somit auf die Hüllkurve aus. Die globale Trägerfrequenz hat aber keinen Einfluss auf die charakteristische Form des Grundinterferenzmusters. Durch die Trägerfrequenz werden nur die Amplituden der bestehenden Schwebungsbäuche beeinflusst, nicht aber die Anzahl der Schwebungsbäuche pro Musterperiode (Abschnitt 6.4).

Wird die kleinste mögliche Auflösung der LSB-Methode beispielsweise mit $\Delta\varphi = 1^\circ$ Pha-

senverschiebung angegeben, ergibt sich für die Distanzunterschiedsänderung δs folgender Mindestwert δs_{min} :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 2\pi f_{T_g} \Delta t \\ &= 2\pi f_{T_g} \frac{\delta s}{c} \quad \text{mit} \quad 2\pi = 360^\circ \\ &= 360^\circ f_{T_g} \frac{\Delta s}{c}\end{aligned}$$

mit Umstellung nach δs :

$$\begin{aligned}\delta s &= \frac{\Delta\varphi \cdot c}{360^\circ \cdot f_{T_g}} \quad \text{mit} \quad \Delta\varphi = 1^\circ \\ \delta s_{min} &= \frac{c}{360 \cdot f_{T_g}} \quad .\end{aligned}\tag{6.1}$$

Gleichung (6.1) zeigt, dass mit steigender Trägerfrequenz f_{T_g} die Auflösung immer feiner wird und immer kleinere Distanzunterschiedsänderungen δs eine ausreichend signifikante Änderung des Interferenzmusters hervorrufen.

Die Größe der Trägerfrequenz nimmt neben dem Einfluss auf die Auflösung der Distanzunterschiedsbestimmung auch Einfluss auf den Messbereich, also wie groß die Distanzunterschiedsänderung werden kann, bis sich ein Muster wiederholt. Der Messbereich wird in Abschnitt 6.7 näher diskutiert.

6.2 Modulationsfrequenz

Der Modulationsanteil $\cos(2\pi f_m t)$ mit der Modulationsfrequenz f_m der beiden Schwebungssignale $b_1(t)$ und $b_2(t)$ stellt eine Synchronisationsbeziehung zwischen den beiden Schwebungen her. Unter der Bedingung, dass die verursachte Phasenverschiebung eines Schwebungssignals auf Grund der Distanzunterschiedsänderung und eine eventuelle Phasendiscrepanz durch nicht aufeinander synchronisierte Signalquellen vernachlässigbar klein sind, können die beiden Modulationsanteile gleich gesetzt werden. Für beide Schwebungssignale kann damit statuiert werden, dass sie *dasselbe* Modulationssignal besitzen. Dieses Signal hat nun die Eigenschaft, *unveränderlich* in seiner Phasenlage zu den beiden Schwebungssignalen zu sein. Dadurch überlagern sich die beiden von der Distanzunterschiedsänderung beeinflussten Trägersignale $\sin(2\pi f_{T_i}(t \pm \Delta t))$ immer mit dem von der Distanzunterschiedsänderung unbeeinflussten Modulationssignal $\cos(2\pi f_m t)$. Das entstehende Ergebnis äußert sich in dem ortsabhängigen Interferenzmuster. Es ist reproduzierbar und für den selben Ort bei unveränderten Randbedingungen immer gleich. Die Modulationsfrequenz f_m charakteri-

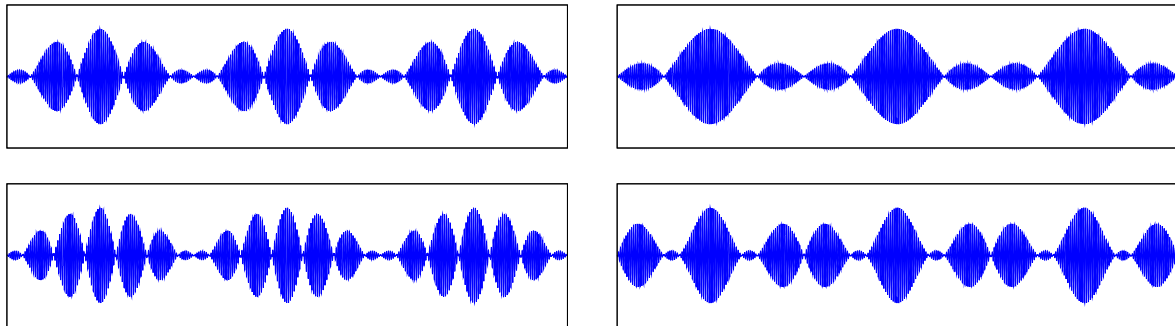


Abbildung 6.1: Verschiedene Interferenzmuster.

siert somit also die Synchronisation der beiden Schwebungssignale $b_1(t)$ und $b_2(t)$. Zudem führen unterschiedliche Modulationsfrequenzen f_m am selben Ort zu verschiedenen Musterperioden (Abschnitt 6.4) und verschiedenen Interferenzmustern (Abschnitt 6.5) bei gleichen Trägerfrequenzen f_{T_i} .

6.3 Schwebungsfrequenz

Die Schwebungsfrequenz f_s setzt für die Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ die beiden hochfrequenten Trägerfrequenzen f_{T_i} der Schwebungssignale $b_1(t)$ und $b_2(t)$ auf eine niederfrequente Signalfrequenz um. Der sich ausbildende Signalanteil $\cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t)$ mit der Schwebungsfrequenz f_s ist die Einhüllende der entstehenden Schwebung aus den beiden Trägeranteilen $\sin(2\pi f_{T_i}(t \pm \Delta t))$. Die Schwebungsfrequenz f_s charakterisiert somit den Signalanteil der Hüllkurve, der die Distanzunterschiedsänderung $\Delta\varphi = 2\pi f_{T_g} \Delta t$ enthält und nimmt Einfluss auf die Musterperiode (Abschnitt 6.4) und die Form des Interferenzmusters (Abschnitt 6.5). Der Schwebungsanteil $\cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t)$ der Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ kann aber auch für den Modulationsanteil $\cos(2\pi f_m t)$ als *ortsabhängige veränderliche* Amplitude aufgefasst werden. In Abhängigkeit der Distanzunterschiedsänderung δs wird die Amplitude des durch die Distanzunterschiedsänderung δs nicht beeinflussten Modulationsanteils nachhaltig verändert. Unterschiedliche Schwebungsfrequenzen führen somit zu einer unterschiedlichen Einflussnahme auf die Amplitude und damit bei gleicher Modulationsfrequenz f_m auf die Entstehung verschiedener Musterperioden (Abschnitt 6.4) und verschiedener Interferenzmuster (Abschnitt 6.5).

6.4 Musterperiode

Das Interferenzsignal $r_{\Delta t}(t)$ setzt sich aus einem definierten deterministischen Interferenzmuster zusammen, das sich periodisch wiederholt. Dieser deterministische Signalabschnitt

wird als Musterperiode T_M bezeichnet. Abbildung 6.1 zeigt verschiedene Interferenzmuster mit ihren verschiedenen Musterperioden. Zurückzuführen ist die Entstehung der Musterperiode T_M auf die Periodizität der beiden Schwebungssignale $b_1(t)$ und $b_2(t)$:

$$b_1(t) = \sin(2\pi f_{T_1} t) \cos(2\pi f_s t) \quad \text{und}$$

$$b_2(t) = \sin(2\pi f_{T_2} t) \cos(2\pi f_s t) \quad .$$

Ihre Überlagerung führt wieder zu einem periodischen Signal. Die Musterperiode T_M ergibt sich aus dem *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* einer halben Periode der Modulationsfrequenz f_m und der Schwebungsfrequenz f_s . Die Gleichungen (6.2) und (6.3) beschreiben diesen Zusammenhang.

$$T_M = \frac{P}{2f_s} \quad P \in \mathbb{N}, P \geq 1 \quad (6.2)$$

$$T_M = \frac{Q}{2f_m} \quad Q \in \mathbb{N}, Q \geq 1 \quad (6.3)$$

$$0 = \left| \frac{P}{2f_s} - \frac{Q}{2f_m} \right| \quad P, Q \geq 1 \quad (6.4)$$

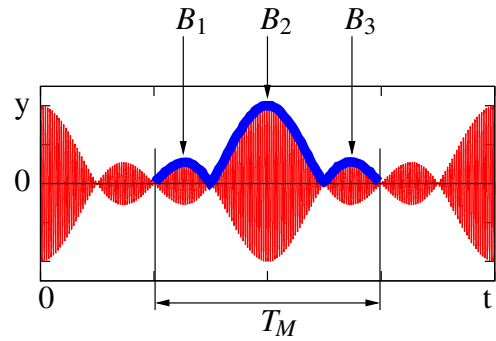


Abbildung 6.2: Musterperiode T_M .

Abbildung 6.2 zeigt die Musterperiode T_M eines individuellen Interferenzmusters. Um T_M zu bestimmen, müssen P und Q nach Gleichung (6.4) berechnet werden. Dies kann beispielsweise durch ein computergestütztes iteratives Suchverfahren erfolgen.

Die Gleichungen (6.2) und (6.3) leiten sich aus der Hüllkurve (Gleichung (5.14)) ab. Eine Musterperiode erstreckt sich jeweils zwischen zwei Punkten der Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$, für die mit $t = T_m$ gilt:

$$2 = | 2 \cdot \cos(2\pi f_m T_M) \cos(2\pi f_s T_M) | \quad . \quad (6.5)$$

Um Gleichung (6.5) zu erfüllen, existiert nur eine Lösung:

$$2 = | 2 \cdot (\pm 1) \cdot (\pm 1) | \quad . \quad (6.6)$$

Damit Gleichung (6.6) unter der Beachtung des Betrags erfüllt wird, gilt allgemein für beide Kosinus-Ausdrücke:

$$\pm 1 = \cos(n\pi) \quad . \quad (6.7)$$

Somit ergibt sich für die Musterperiode T_M folgende allgemeine Beziehung:

$$n\pi = 2\pi f T_M \quad (6.8)$$

$$T_M = \frac{n}{2f} \quad . \quad (6.9)$$

Wird nun Gleichung (6.9) für die Modulationsfrequenz f_m und die Schwebungsfrequenz f_s spezialisiert:

$$f_m \rightarrow f = f_m \quad \text{und} \quad n = Q \quad \text{und}$$

$$f_s \rightarrow f = f_s \quad \text{und} \quad n = P,$$

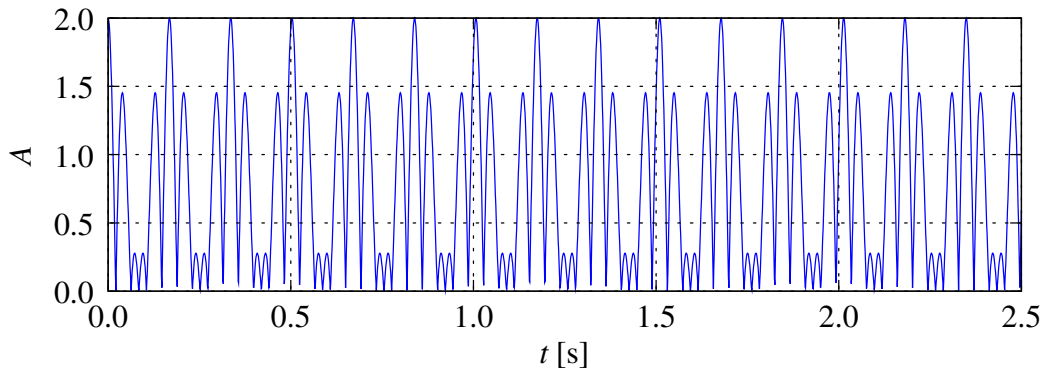
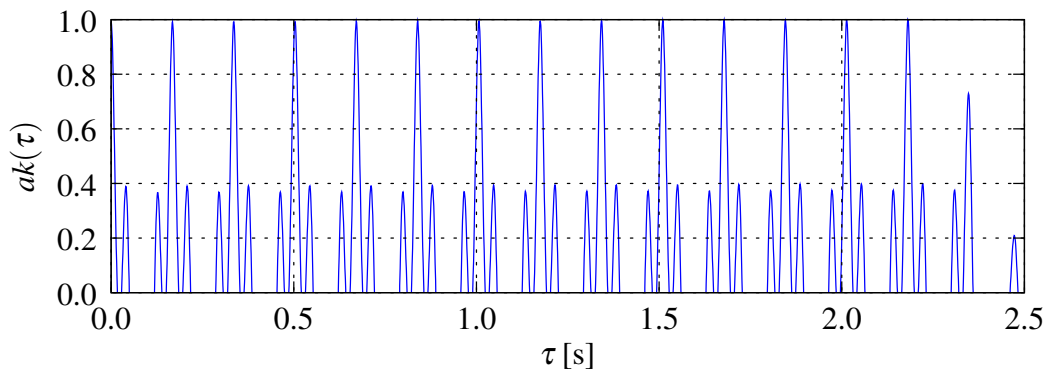
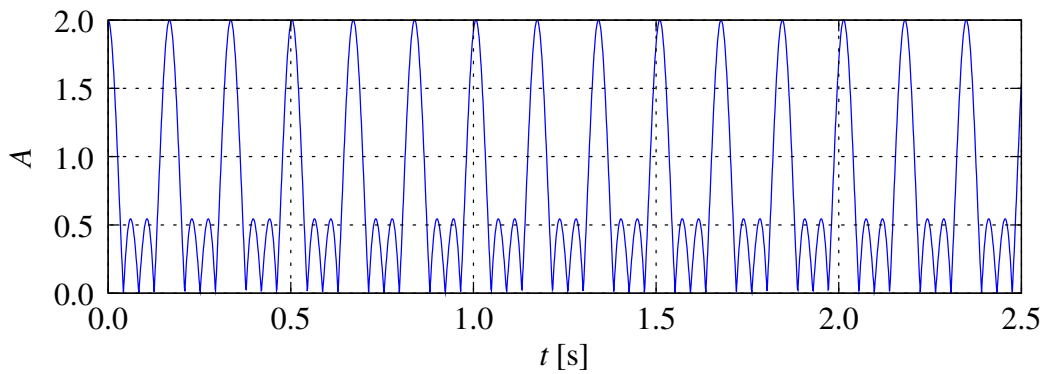
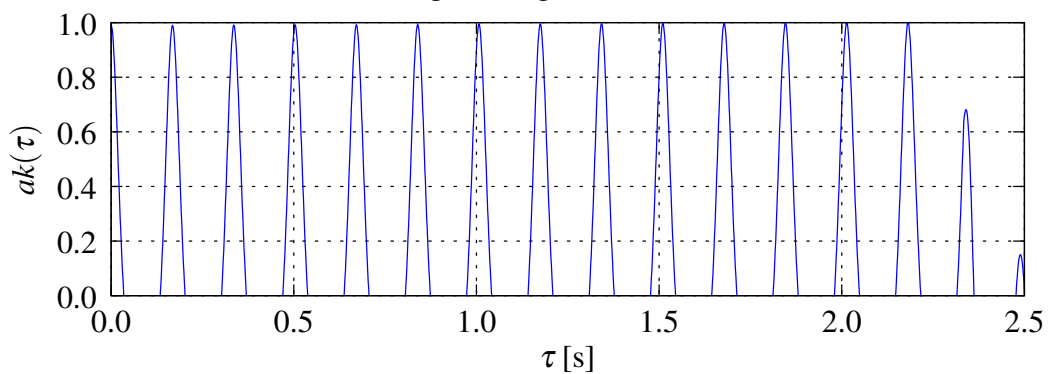
entstehen die Gleichungen (6.2) und (6.3). Das Verhältnis von Modulationsfrequenz f_m und Schwebungsfrequenz f_s bestimmt somit die zeitliche Länge und die notwendige Zeit zum Erfassen eines kompletten Musters. Die Trägerfrequenz f_{T_g} nimmt auf die Musterperiode und das Grundinterferenzmuster keinen Einfluss. Sie nimmt nur durch eine Distanzunterschiedsänderung Einfluss auf die Änderung der Amplituden der Schwebungsbäuche des Grundinterferenzmusters (Abschnitt 5.4).

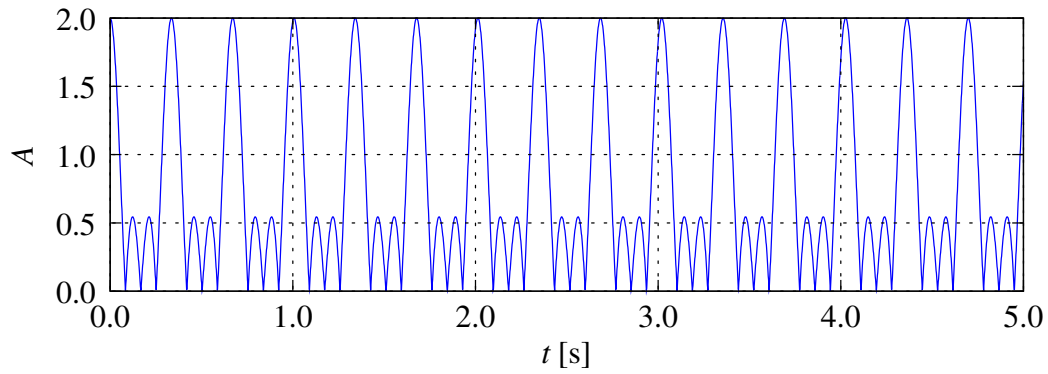
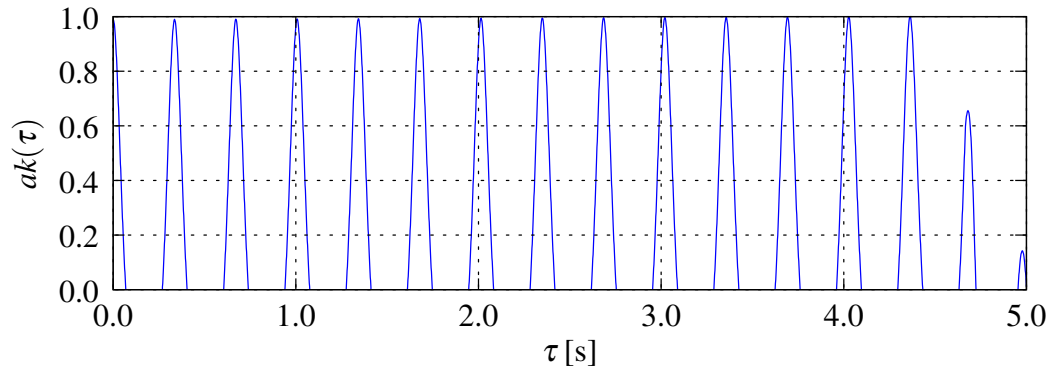
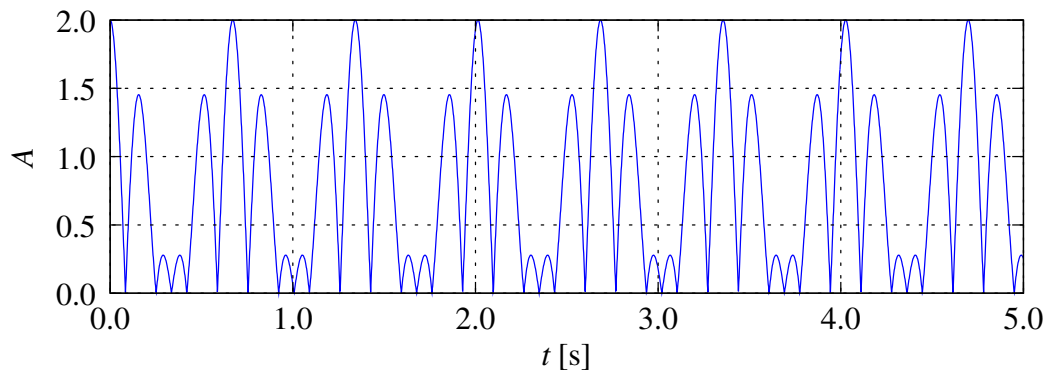
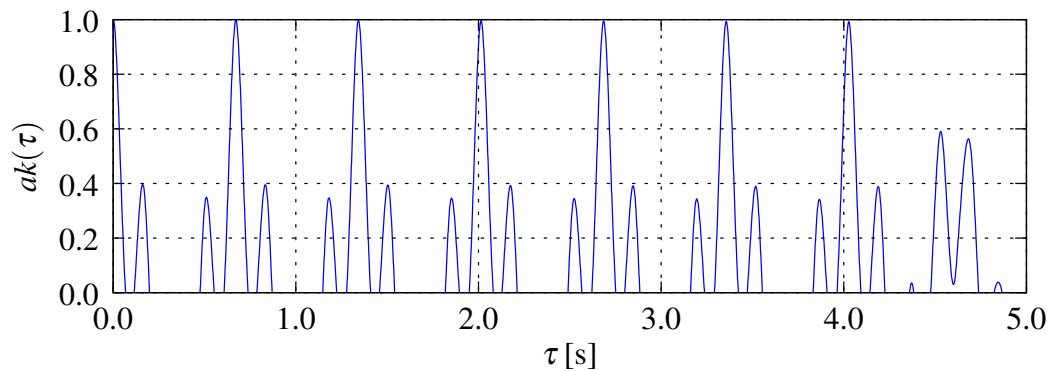
Simulationen

Für den Nachweis der Berechnung der Musterperiode T_M wurden für die Kombinationen aus den Musterfaktoren $k = [0.25, 0.5, 2.00, 4.00]$, der Trägerfrequenz $f_{T_g} = 50$ MHz und der Schwebungsfrequenz $f_s = 2.98$ Hz bei einem Distanzunterschied $\Delta s = 0$ jeweils die Musterperiode T_M mit der Gleichung (6.2) beziehungsweise (6.3) und ein dazu entsprechend langer *Mustersignalabschnitt* $x = [x(1) \dots x(m)]$ berechnet. Mittels Auto-Korrelation (Gleichung (6.10)) wurde nun dieser Mustersignalabschnitt x in einem Signal $r = [r(1) \dots r(n)]$ mit den selben Parametereinstellungen gesucht:

$$ak(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m (x(i) - \hat{x})(r(\tau+i) - \hat{r}) \quad \text{mit} \quad (\tau+i) \leq n \quad . \quad (6.10)$$

Die Signale und die Korrelations-Werte $ak(\tau)$ sind in den Diagrammen 6.3 bis 6.10 dargestellt. Die Diagramme zeigen im Paar zuerst das mit der Hüllkurven-Funktion zu einem Musterfaktor k vorausberechnete Signal und nachfolgend das Ergebnis der Auto-Korrelation. An den Stellen eines maximalen Schwingungsbauchs in der Signaldarstellung erreicht die Korrelation ebenfalls ein Maximum. Die Überlappung beider Maxima am selben Zeitpunkt beweist die Richtigkeit der Berechnung der Musterperiode T_M .

Abbildung 6.3: Signal für $k=0.25$.Abbildung 6.4: Auto-Korrelation für $k=0.25$.Abbildung 6.5: Signal für $k=0.50$.Abbildung 6.6: Auto-Korrelation für $k=0.50$.

Abbildung 6.7: Signal für $k = 2.00$.Abbildung 6.8: Auto-Korrelation für $k = 2.00$.Abbildung 6.9: Signal für $k = 4.00$.Abbildung 6.10: Auto-Korrelation für $k = 4.00$.

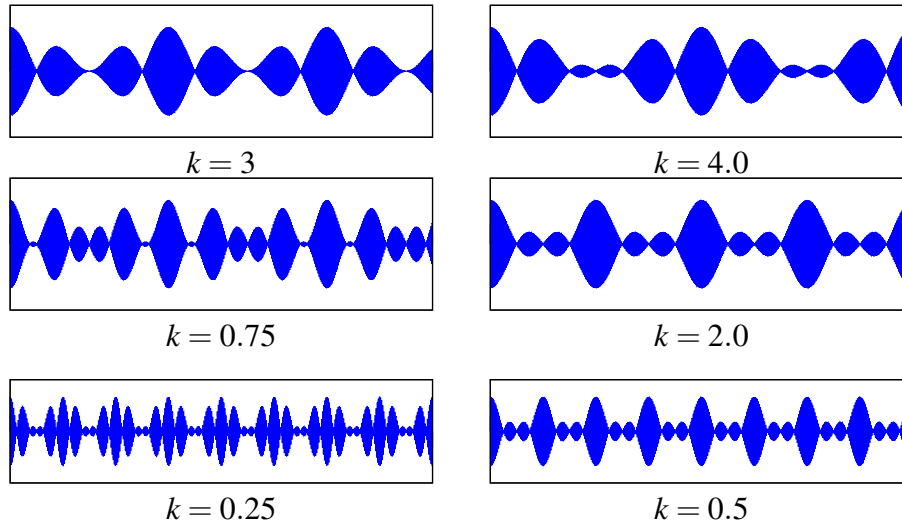


Abbildung 6.11: Unterschiedliche Interferenzmuster in Abhängigkeit des Musterfaktors k über den gleichen Zeitbereich.

6.5 Musterfaktor

Wie bereits erwähnt, nimmt das Verhältnis von Modulationsfrequenz f_m zur Schwebungsfrequenz f_s Einfluss auf die Form und die Anzahl der Schwebungsbäuche pro Musterperiode des sich ausbildenden Interferenzmusters. Das Verhältnis wird mit dem jetzt eingeführten Musterfaktor k wie folgt festgelegt:

$$f_m = \frac{f_s}{k} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Q}, k > 0 \text{ und } k \neq 1. \quad (6.11)$$

Der Musterfaktor k muss größer 0 und ungleich 1 sein. Bei $k=1$ entsteht eine *einfache* Schwebung, ohne dass sich ein charakteristisch aussagekräftiges ortsabhängiges Interferenzmuster ausbildet. Abbildung 6.11 zeigt für verschiedene Musterfaktoren über den gleichen Zeitbereich das sich dazu ausbildende Interferenzmuster. Bei allen Mustern sind die Trägerfrequenz f_{T_g} und die Schwebungsfrequenz f_s gleich. Die Abbildungen der verschiedenen Musterfaktoren zeigen auch, dass besonders gerade ganzzahlige Teiler ($k=2.00$, $k=4.00$) beziehungsweise gerade ganzzahlige Multiplikatoren (als $1/k$ mit $k=0.25$, $k=0.50$) sehr harmonische Interferenzmuster erzeugen und die Länge der Musterperiode bei Musterfaktoren kleiner 1 im Allgemeinen kürzer ausfällt als für Musterfaktoren größer 1 (Vergleich Musterfaktor $k=2.00$ und $k=0.50$).

6.6 Einflüsse auf die Hüllkurve

In den nachfolgenden Abbildungen sind verschiedene Hüllkurven dargestellt, um die Einflüsse von Trägerfrequenz f_{T_g} , Musterfaktor k und Distanzunterschied Δs zu veranschaulichen.

Bei allen Abbildungen beträgt die Schwebungsfrequenz $f_s = 2.98 \text{ Hz}$ und die Kurven einer Abbildung sind jeweils um den Betrag ihrer Phase nach links verschoben, um eine anschaulichere Deckung aller Kurven einer Abbildung zueinander darzustellen.

Änderung der Trägerfrequenz

In den Abbildungen 6.12 bis 6.15 ist der gleiche Distanzunterschied $\Delta s = 0.2 \text{ m}$ für die Musterfaktoren $k = [0.25, 0.50, 2.00, 4.00]$ mit jeweils den drei verschiedenen Trägerfrequenzen f_{T_g} :

- $f_{T_g} = 50 \text{ Hz}$ (–),
- $f_{T_g} = 100 \text{ Hz}$ (–) und
- $f_{T_g} = 150 \text{ Hz}$ (–)

dargestellt. Deutlich ist für jeden Musterfaktor die unterschiedliche Musterausprägung auf Grund unterschiedlicher Phasen erkennbar. Dies verdeutlicht, dass mit steigender Trägerfrequenz die Auflösung steigt, da die Veränderung der Phase stärker (bei gleichem Distanzunterschied) ausfällt.

Änderung des Distanzunterschieds

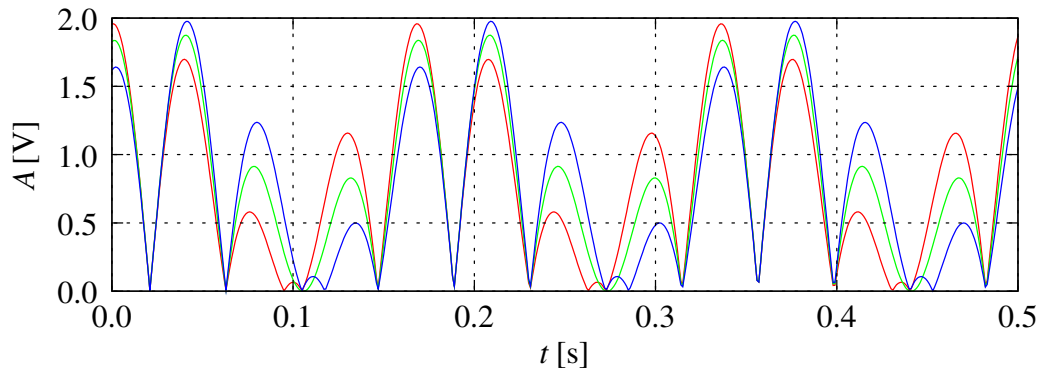
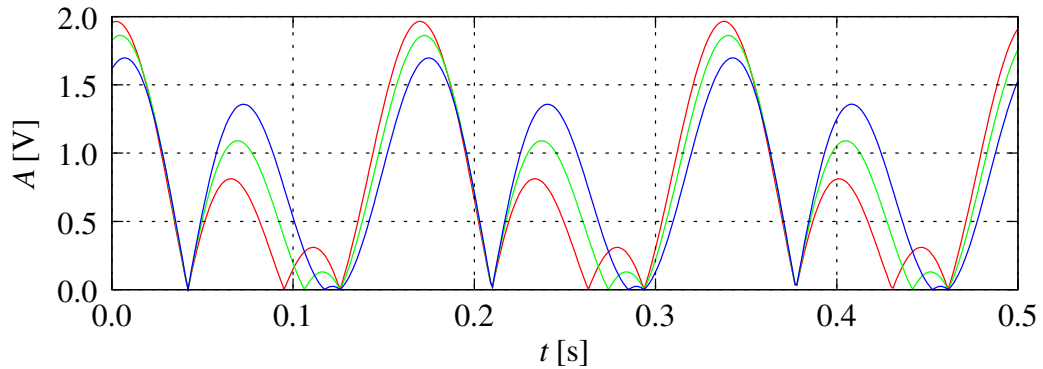
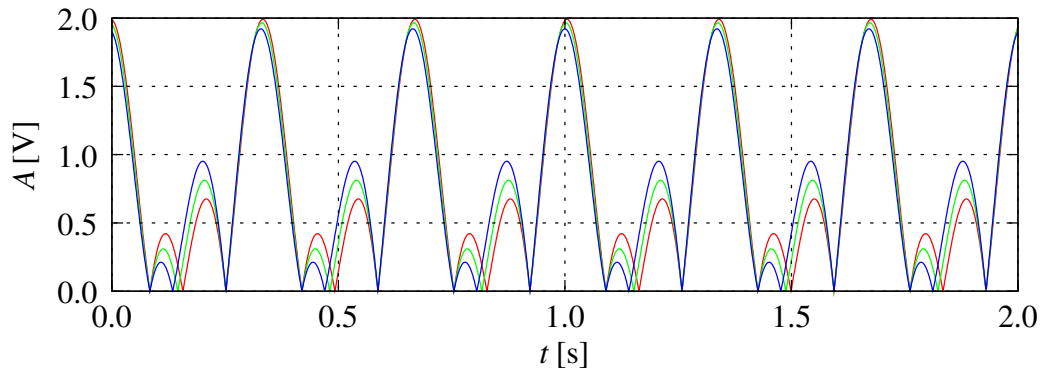
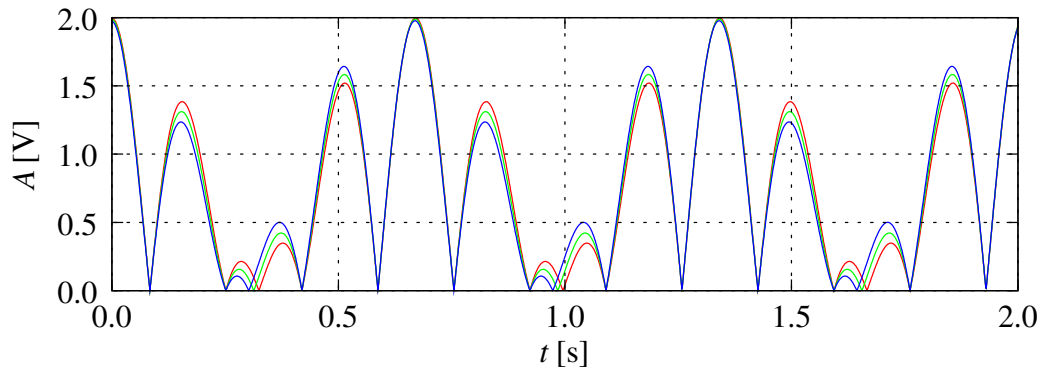
In den Abbildungen 6.16 bis 6.19 ist nun die gleiche Trägerfrequenz $f_{T_g} = 100 \text{ MHz}$ für die gleichen Musterfaktoren k aber den drei verschiedenen Distanzunterschieden:

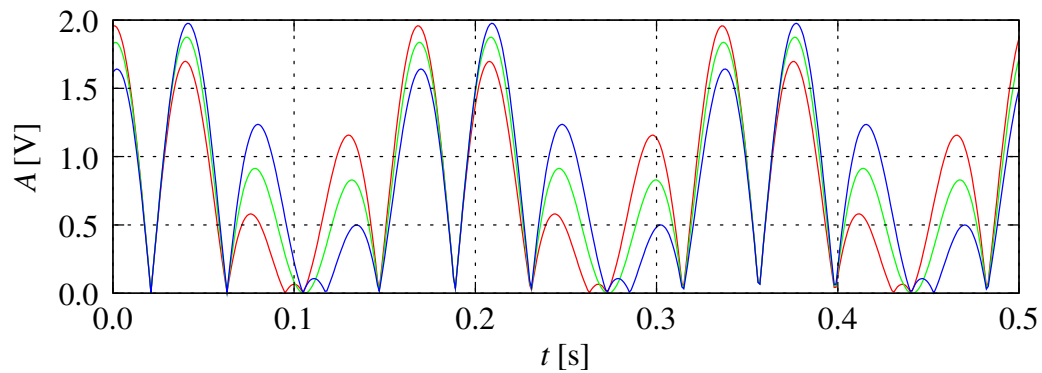
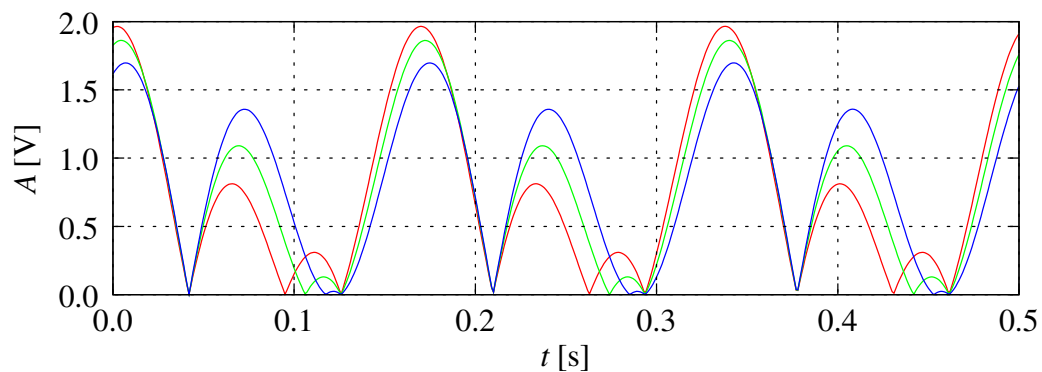
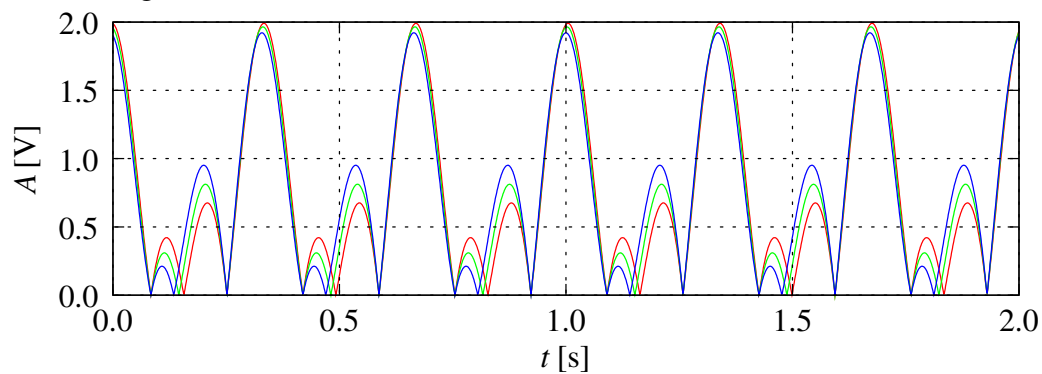
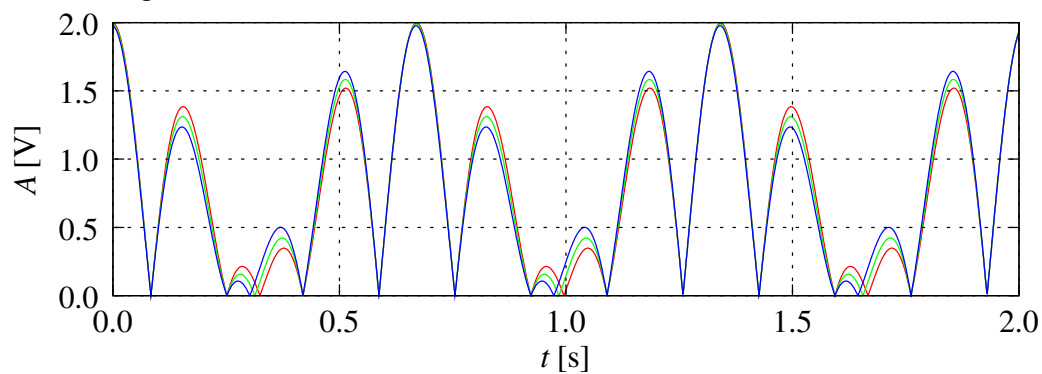
$$\Delta s = 10 \text{ cm} \text{ (–)}, \quad \Delta s = 20 \text{ cm} \text{ (–)} \quad \text{und} \quad \Delta s = 30 \text{ cm} \text{ (–)}$$

dargestellt, um die Veränderung des Musters in Bezug auf unterschiedliche Distanzunterschiede zu veranschaulichen. Es ist deutlich zu erkennen, wie mit steigender Trägerfrequenz die Auflösung steigt, da die Veränderung der Phase stärker (bei gleicher Trägerfrequenz) ausfällt.

Einfluss des Musterfaktors

Die Untersuchungen zu den Änderungen der Trägerfrequenz und den Änderungen des Distanzunterschieds zeigen auch, dass bei kleinen Musterfaktoren (vorzugsweise $k < 1$) die jeweiligen Änderungen innerhalb einer Abbildung stärker ausfallen, als für größere Musterfaktoren ($k > 1$).

Abbildung 6.12: Musterfaktor $k = 0.25$ bei verschiedenen Trägerfrequenzen.Abbildung 6.13: Musterfaktor $k = 0.50$ bei verschiedenen Trägerfrequenzen.Abbildung 6.14: Musterfaktor $k = 2.00$ bei verschiedenen Trägerfrequenzen.Abbildung 6.15: Musterfaktor $k = 4.00$ bei verschiedenen Trägerfrequenzen.

Abbildung 6.16: Musterfaktor $k = 0.25$ bei verschiedenen Distanzunterschieden.Abbildung 6.17: Musterfaktor $k = 0.50$ bei verschiedenen Distanzunterschieden.Abbildung 6.18: Musterfaktor $k = 2.00$ bei verschiedenen Distanzunterschieden.Abbildung 6.19: Musterfaktor $k = 4.00$ bei verschiedenen Distanzunterschieden.

6.7 Messbereich

Da die Hüllkurve (Gleichung (5.14)) eine periodische Funktion ist, stellt sich nun die Frage, wann wiederholt sich ein Interferenzmuster? Oder, um welchen Betrag kann die Distanzunterschiedsänderung δs anwachsen, bis sich für zwei verschiedene Distanzunterschiede Δs das gleiche Interferenzmuster einstellt? Nach Gleichung (5.14) muss für diese beiden Distanzunterschiede gelten:

$$\tilde{r}_{\Delta t}(t) \Big|_{\Delta s_1} = \tilde{r}_{\Delta t}(t) \Big|_{\Delta s_2} \quad \text{mit} \quad \Delta s_1 \neq \Delta s_2 \quad \text{und} \quad \Delta s = c \cdot \Delta t \quad . \quad (6.12)$$

Das Interferenzmuster wird durch die Superposition der verschobenen Kosinus-Terme mit der Schwebungsfrequenz f_s der Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ bestimmt. Durch die Änderung des Distanzunterschieds im zweiten Kosinus-Term $\cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta s / c)$ ergeben sich verschiedene Überlagerungsbeziehungen der beiden Funktionsterme (Abbildung 6.20). Auf Grund der Periodizitätseigenschaft der Kosinus-Funktion entstehen in festen Distanzen die gleichen Superpositionsbeziehungen, was zu gleichen Interferenzmustern führt. Abbildung 6.20 zeigt für die Musterfaktoren $k = 0.50$ und $k = 0.70$ mit $\Delta s = 0$ die jeweilige Musterperiode in Beziehung des eben beschriebenen Sachverhalts.

Die Distanzunterschiedsänderung δs bestimmt sich analog der Herleitung der Musterperiode T_M (Abschnitt 6.4), mit dem Unterschied, dass für die Phase $\Delta\varphi$ gilt:

$$\Delta\varphi = 2\pi f_{T_g} \Delta t \neq 0 \quad . \quad (6.13)$$

Es wird wieder die Lösung gesucht, die folgende Bedingung erfüllt:

$$2 = |2 \cdot (\pm 1) \cdot (\pm 1)| \quad \text{mit} \quad (6.14)$$

$$\pm 1 = \cos(n\pi) \quad . \quad (6.15)$$

Damit ergibt sich für beide Kosinus-Terme der Hüllkurve:

$$q\pi = 2\pi f_m t_m \quad \text{und} \quad (6.16)$$

$$p\pi = 2\pi f_s t_s - 2\pi f_{T_g} \Delta t \quad (6.17)$$

und aufgelöst nach t_m und t_s :

$$t_m = \frac{q}{2f_m} \quad \text{und} \quad (6.18)$$

$$t_s = \frac{p}{2f_s} - \frac{f_{T_g} \Delta t}{f_s} \quad . \quad (6.19)$$

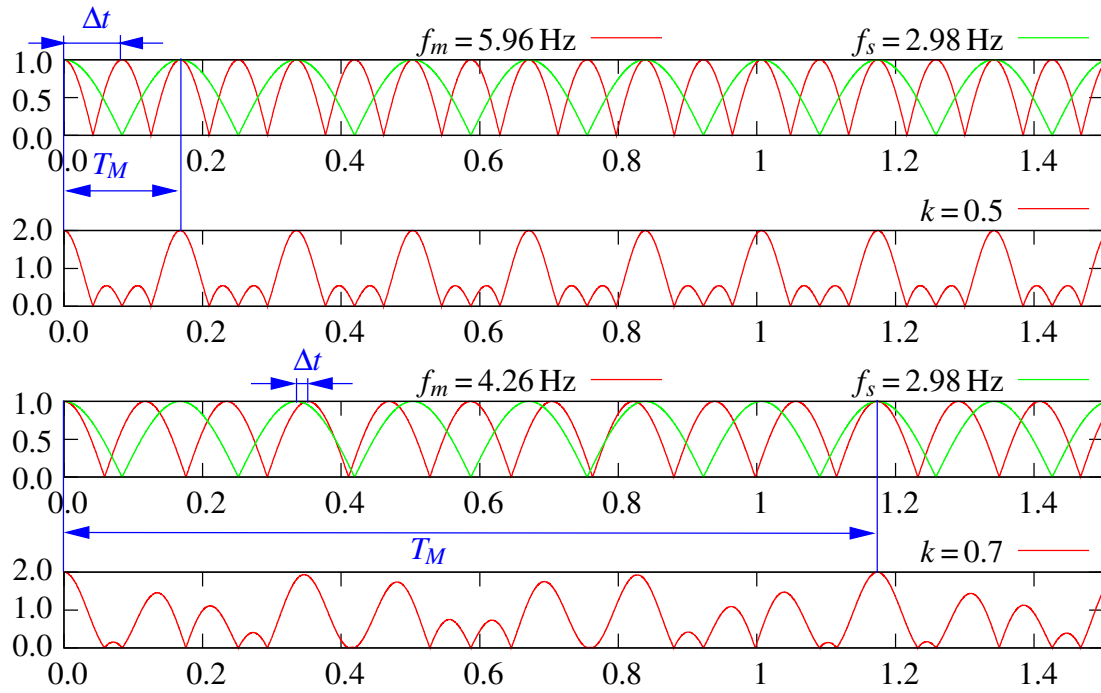


Abbildung 6.20: Hüllkurve und Kosinus-Terme für $k = 0.50$ (oben) und $k = 0.70$ (unten).

Da beide Zeiten t_m und t_s gleich sein müssen, kann Δt berechnet werden:

$$t_m = t_s \quad (6.20)$$

$$\frac{q}{2f_m} = \frac{p}{2f_s} - \frac{f_{T_g} \Delta t}{f_s} \quad (6.21)$$

$$\Delta t = \frac{f_s}{f_{T_g}} \cdot \left(\frac{p}{2f_s} - \frac{q}{2f_m} \right) \quad \text{mit} \quad 0 < \Delta t \leq T_M, \quad (6.22)$$

woraus sich aus Gleichung (6.22) die Distanzunterschiedsänderung δs ergibt:

$$\frac{\delta s}{c} = \frac{f_s}{f_{T_g}} \cdot z \quad \text{mit} \quad z = \left(\frac{p}{2f_s} - \frac{q}{2f_m} \right) \quad \text{und} \quad \Delta t = \frac{\delta s}{c} \quad (6.23)$$

$$\delta s = z c \cdot \frac{f_s}{f_{T_g}} := \text{Minimum} \quad (6.24)$$

Die Distanzunterschiedsänderung δs berechnet sich dann als Lösung der Gleichung (6.24) als Extremwertaufgabe für die Parameter p und q durch Suchen des Minimums. Die Bestimmung der Indizes p und q kann beispielsweise mit einem iterativen Suchalgorithmus auf einem Computer durchgeführt werden.

Die Distanzunterschiedsänderung δs bestimmt nun den *einfachen* Messbereich der LSB-Methode. Der einfache Messbereich wird als derjenige Bereich definiert, in dem keine Musterwiederholungen auftreten. Der Messbereich wird hauptsächlich durch die globale Träger-

frequenz f_{T_g} bestimmt. Je größer die Trägerfrequenz, desto kleiner der einfache Messbereich. Die Distanzunterschiedsänderung δs markiert aber nicht zwingend den größtmöglichen Messbereich. Ist es möglich, die Anzahl der Musterwiederholungen zu messen beziehungsweise zu zählen, ist eine Bestimmung des Distanzunterschieds Δs auch über die Grenze der Distanzunterschiedsänderung δs hinaus durchführbar.

Simulationen

In den durchgeführten Simulationen zum Messbereich wurden mit der Hüllkurven-Funktion (Gleichung (5.14)) eine Hüllkurve mit dem Distanzunterschied $\Delta s = 0$ und ein Satz von Hüllkurven für den Bereich $0 \leq \Delta s' \leq 300$ cm erzeugt. Die Hüllkurve mit $\Delta s = 0$ wurde anschließend mittels Kreuz-Korrelation (Gleichung (6.25)) gegen jede Kurve des Hüllkurven-Satzes verglichen.

$$kk(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n-\tau} (x(i) - \hat{x})(y(i + \tau) - \hat{y}) \quad (6.25)$$

Aus den erhaltenen Korrelations-Werten $kk(\tau)$ zu einem Distanzunterschied $\Delta s'$ wurde der Wert der größten Übereinstimmung ausgewählt. In den Diagrammen der Abbildung 6.21 sind die ermittelten Korrelations-Werte über dem jeweiligen Distanzunterschied $\Delta s'$ aufgetragen. Parallel dazu wurden die Distanzunterschiedsänderung δs mit Gleichung (6.24) berechnet und der Bereich ohne Musterwiederholung zusätzlich eingezeichnet. Innerhalb dieses Bereichs ist deutlich die Abnahme der Ähnlichkeit mit wachsender Distanzunterschiedsänderung vom linken Rand bis zur Hälfte des Bereichs und anschließender Zunahme der Ähnlichkeit zum rechten Rand zu erkennen. Die Korrelations-Werte sind auf $0 \leq kk(\tau) \leq 1$ normiert, wobei 1 vollständige Übereinstimmung und 0 überhaupt keine Ähnlichkeit darstellt.

Die Simulationen wurden mit den folgenden Parametern durchgeführt: $f_{T_g} = 100$ MHz und $f_s = 2.98$ Hz sowie den Musterfaktoren $k = [0.25, 0.50, 2.00, 4.00]$. Für die verwendeten Musterfaktoren ergeben sich folgende Distanzunterschiedsänderungen δs :

k	δs [cm]
0.25	37.47
0.50	74.95
2.00	149.90
4.00	149.90

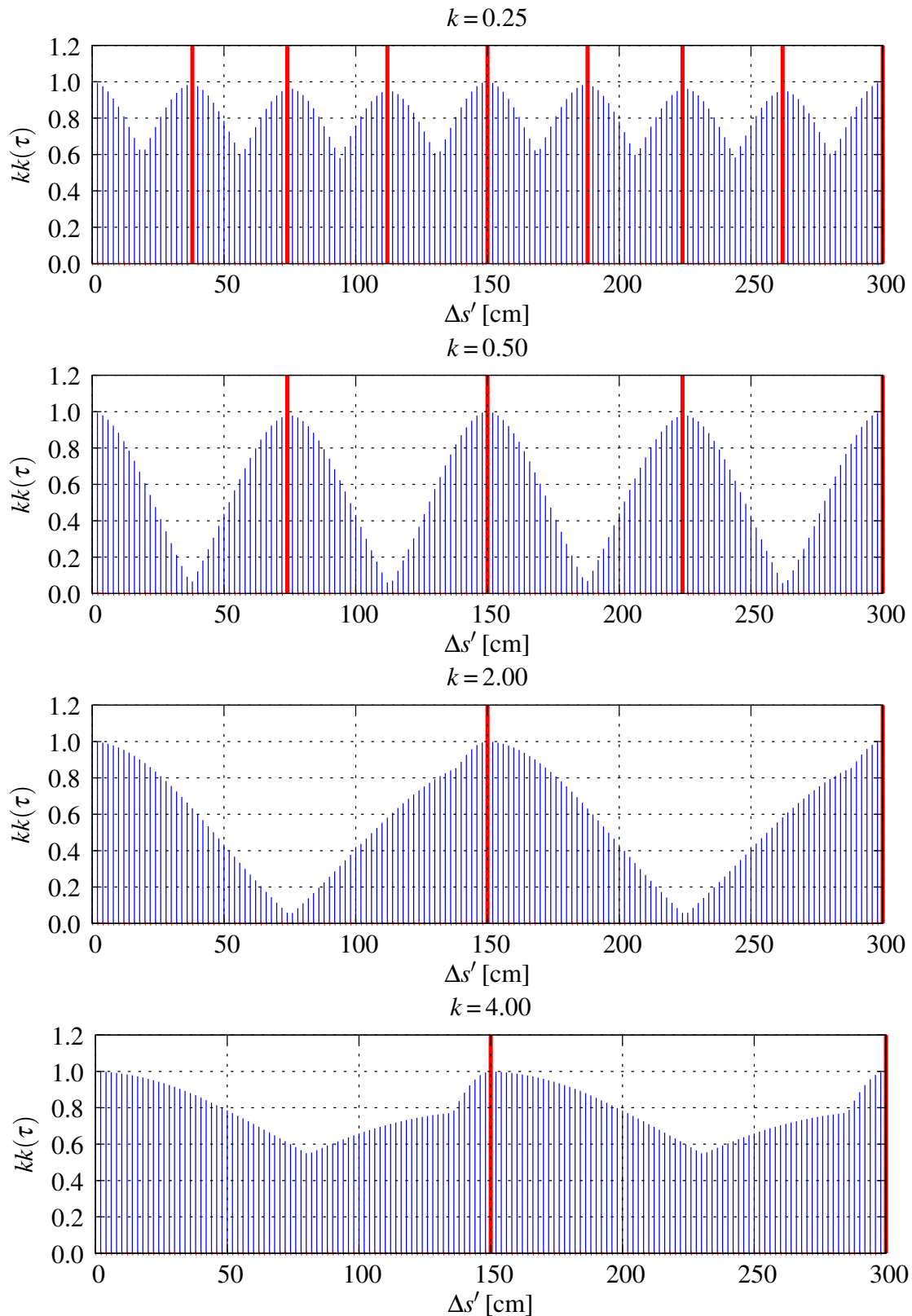


Abbildung 6.21: Korrelations-Werte $kk(\tau)$ (I) der Distanzunterschiede $\Delta s'$ mit den Grenzen der Distanzunterschiedsänderung δs (I) für verschiedene Musterfaktoren k .

6.8 Zusammenfassung

Mit den beschriebenen Eigenschaften der LSB-Methode ist es möglich, diese genauer zu charakterisieren. Drei wesentliche Aspekte stechen hervor:

1. Die Messung eines Distanzunterschieds erfolgt mit einem hochfrequenten Trägersignal. Die Auswertung hingegen wird mit einer niederfrequenten Hüllkurve durchgeführt.
2. Die Schwebungsfrequenz und die Modulationsfrequenz sind über den Musterfaktor verbunden und bestimmen dadurch die Hüllkurve, die Musterperiode und die Form des Grundinterferenzmusters (Anzahl Schwebungsbäuche pro Musterperiode).
3. Der Messbereich und die Auflösung der Bestimmung des Distanzunterschieds werden durch die Trägerfrequenz bestimmt. Je größer die Trägerfrequenz, desto höhere Auflösungen können erzielt werden. Damit verkleinert sich aber auch der einfache Messbereich. Messbereich und Auflösung wirken also entgegengesetzt. Eine hohe Auflösung bedingt einen kleinen einfachen Messbereich. Ein großer Messbereich hingegen realisiert nur eine geringe Auflösung.

Rückwirkend wird die LSB-Methode vollständig über die drei Parameter:

1. Globale Trägerfrequenz $f_{T_g} = (f_{T_1} + f_{T_2})/2$,
2. Schwebungsfrequenz $f_s = (f_{T_1} - f_{T_2})/2$ und den
3. Musterfaktor k

eindeutig beschrieben. Daraus sind die benötigte Modulationsfrequenz $f_m = f_s/k$ und die benötigten Trägerfrequenzen f_{T_1} und f_{T_2} für die ausgesendeten Schwebungen ableitbar. Weiterhin wird der Distanzunterschied Δs mit der hochfrequenten globalen Trägerfrequenz f_{T_g} bestimmt und ist somit im Zentimeter- und Millimeterbereich auflösbar.

7 Gegenüberstellung zu anderen Lokalisierungssystemen

In den vorherigen Kapiteln ist die LSB-Methode in ihrer Funktionsweise (Kapitel 5) und ihren Eigenschaften (Kapitel 6) eingehend beschrieben worden. In diesem Kapitel wird die LSB-Methode nun der Phasenmessung und der Zeitbereichsreflektometrie gegenübergestellt. Dies soll dazu beitragen, die LSB-Methode besser den Systemen der Lokalisierung zuzuordnen und auch eine Abgrenzung zu diesen Systemen zu schaffen.

7.1 Phasenmessung

Werden die LSB-Methode und die Phasenmessung (Abschnitt 3.1) einander gegenübergestellt, ist deutlich die Messung des Phasenunterschieds als eine signifikante Gemeinsamkeit zu erkennen. Beide Systeme messen die Phasendifferenz zwischen zwei Signalen. Die Phasenmessung bestimmt *direkt* die Phasendifferenz der beiden *realen* Signale. Dabei müssen beide Signal die selbe Frequenz besitzen und die Einheit zur Phasenmessung muss für die verwendete Frequenz angepasst sein. Die LSB-Methode hingegen misst *indirekt* die Phasendifferenz der beiden Schwebungssignale und transformiert die Phasendifferenz durch die Bildung der Hüllkurve des Interferenzsignals $r_{\Delta t}^*(t)$ (Gleichung (5.5) in vereinfachter Form) in die *absolute* Phase φ_{abs} der Hüllkurve (Gleichung (5.14)).

$$r_{\Delta t}^*(t) \approx \cos(2\pi f_s t) \cos(2\pi f_{T_1} t - \varphi_1) + \cos(2\pi f_s t) \cos(2\pi f_{T_2} t - \varphi_2) \quad (\text{Wdh. Gl. (5.5)})$$

↓ Transformation von Frequenz und Phase

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_{abs} \quad \text{mit} \quad f_{T_g} = (f_{T_1} + f_{T_2})/2$$

↓ Bildung der Hüllkurve

$$\tilde{r}_{\Delta t}(t) = \underbrace{\left| 2 \cdot \underbrace{\cos(2\pi f_m t)}_{\text{Modulationsanteil}} \cdot \underbrace{\cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t)}_{\varphi_{abs}} \right|}_{\text{Schwebungsanteil}} \quad (\text{Wdh. Gl. (5.14)})$$

Die beiden Schwebungssignale der LSB-Methode besitzen zwar unterschiedliche Fre-

quenzen f_{T_1} und f_{T_2} , aber durch ihre Superposition entsteht die gemeinsame Trägerfrequenz f_{T_g} . Invers interpretiert kann formuliert werden, dass die Phasendifferenz zwischen den beiden Schwebungssignalen bestimmt wird, als wenn beide Schwebungssignale die gleiche Frequenz, nämlich die Trägerfrequenz f_{T_g} , besitzen. Die Phasendifferenz des Trägersignals liegt dabei als absolute Phase φ_{abs} des Schwebungsanteils der Hüllkurve vor. Die LSB-Methode liefert zudem auch den Nullbezugspunkt dieser Phase φ_{abs} des Schwebungsanteils mit. Dieser Bezugspunkt ist in dem Modulationsanteil der Hüllkurve verankert. Die Frequenz des Schwebungsanteils f_s ist dabei von der Trägerfrequenz f_{T_g} unabhängig, wodurch die Einheit zur Bestimmung der Phasendifferenz unabhängig der Trägerfrequenz f_{T_g} ist. Die Einheit der Phasenmessung unterstützt somit einen theoretisch unendlich großen Frequenzbereich.

Die LSB-Methode und die Phasenmessung unterscheiden sich hauptsächlich in der Art, wie die Phasendifferenz gemessen wird. Die Phasenmessung bestimmt die Phasendifferenz durch den direkten Vergleich der beiden Signale bei der jeweiligen Signalfrequenz. Daraus ergibt sich für die Phasenmessung, dass sich mit steigender Frequenz auch die Anforderungen an die Einheit zur Phasendifferenzmessung erhöhen. Die LSB-Methode bestimmt die Phasendifferenz aus einem dritten Signal – der Hüllkurve – und nicht direkt aus den beiden Schwebungssignalen. Durch die Auswertung der Hüllkurve ist die Phasendifferenzmessung selbst unabhängig der beiden Signalfrequenzen der Schwebungssignale. Insbesondere bei sehr hochfrequenten Signalen, mehrere zehn oder sogar hundert Gigahertz, kann dies ein besonderer Vorteil gegenüber der klassischen Phasenmessung sein.

Beiden Systemen ist weiterhin gemein, dass eine eindeutige Bestimmung des Distanzunterschieds Δs nur innerhalb einer ganzen Wellenlänge λ des verwendeten Signals (siehe hierzu Abschnitt 3.1) möglich ist. Über diese Grenze hinaus muss bei beiden Systemen die Mehrdeutigkeit N der Wellenlänge λ aufgelöst werden (Gleichung (3.2)).

$$\Delta s = N \cdot \lambda + \Delta \lambda \quad (\text{Wdh. Gl. (3.2)})$$

7.2 Zeitbereichsreflektometrie

Die LSB-Methode unterscheidet sich doch in wesentlichen Punkten von der Zeitbereichsreflektometrie (Abschnitt 3.1). Die LSB-Methode nutzt zwei permanente Signale, die Zeitbereichsreflektometrie einen Signal-Impuls. Die Verwendung eines Impulses ermöglicht der Zeitbereichsreflektometrie die Ortung einer Störstelle beziehungsweise die Messung der Kabellänge von einem Kabelende aus. Zur Ortung der Störstellen beziehungsweise der Messung der Kabellänge misst die Zeitbereichsreflektometrie hauptsächlich die Laufzeit des Impulses. Hierzu werden insbesondere für hohe Messauflösungen sehr schnelle und präzise Zähler benötigt. Die LSB-Methode dahingehend wertet die Phasendifferenz zweier Signale aus und ist

nur in der Lage, die Längendifferenz zwischen zwei verschiedenen Kabeln zu messen oder eine Ortung eines Betrachtungspunkts auf einem Leiter durchzuführen, wenn sie auf beide Kabelenden zugreifen kann. Ob die LSB-Methode ähnlich der Zeitbereichsreflektometrie zur Ortung von Störstellen eingesetzt werden kann, ist mit dem jetzigen Stand der Untersuchungen nicht zu beantworten. Eventuell ermöglicht der Einfluss der Amplitudendiskrepanz (Abschnitt 12.2) auf das Interferenzsignal eine äquivalente Störstellenortung.

7.3 Weitere Lokalisierungssysteme

Die LSB-Methode den weiteren im Kapitel 3 vorgestellten Lokalisierungssystemen gegenüber zu stellen, ist nur sehr bedingt möglich. Zum einen werden völlig andere Technologien (Ultraschall, Infrarot, Laser, etc.) verwendet oder die Systeme selbst werden in einem anderem Umfeld (Funk/Freiraum) eingesetzt. Daher wird an dieser Stelle auf eine Gegenüberstellung zu diesen Systemen verzichtet.

7.4 Zusammenfassung

Die größten Übereinstimmungen besitzt die LSB-Methode mit der Phasenmessung. Zur Zeitbereichsreflektometrie bestehen nur sehr bedingt Parallelen. Die Übereinstimmungen mit der Phasenmessung sind weitreichend. In einem Punkt besteht aber ein wesentlicher Unterschied, wodurch sich die LSB-Methode doch deutlich von der Phasenmessung abgrenzt. Die Phasenmessung wertet die Phasendifferenz zweier Signale direkt, bei der jeweiligen Signalfrequenz, aus. Der Prozess der Phasendifferenzmessung ist somit von der Signalfrequenz der beiden Signale abhängig. Die LSB-Methode nutzt ein Transformationssignal, die Hüllkurve des Interferenzsignals, zur Bestimmung der Phasendifferenz. Der Prozess der Phasendifferenzmessung ist, im Gegensatz zur Phasenmessung, von der Signalfrequenz des Interferenzsignals unabhängig. Lediglich die dem Prozess der Phasendifferenzmessung vorgeschaltete Einheit zur Bestimmung der Hüllkurve muss auf die Signalfrequenz des Interferenzsignals angepasst sein. Dieser Unterschied kommt immer deutlicher bei sehr hohen Signalfrequenzen von mehreren zehn oder hundert Gigahertz zum Tragen.

8 Experimentelle Validierung:

Versuchsaufbau

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Theorie zur LSB-Methode ausführlich beschrieben. Dieses Kapitel beschreibt nun den Aufbau der experimentellen Validierung des allgemeinen Funktionsprinzips der LSB-Methode anhand eines kabelgebundenen Aufbaus.

8.1 Prinzipaufbau

Die LSB-Methode basiert auf der Rekonstruktion des Distanzunterschieds Δs aus der Hüllkurve des hochfrequenten Interferenzsignals. Dazu muss die Auswertungseinheit aus einem Hüllkurven-Detektor [48] und einer Einheit zur Berechnung des Distanzunterschieds Δs bestehen. Abbildung 8.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau dieser Einheit mit dem Hüllkurven-Detektor und seiner Wirkungsweise sowie der nachgeschalteten Berechnungseinheit zur Bestimmung des Distanzunterschieds Δs . Die folgenden Abschnitte beschreiben wie das Experiment aufgebaut war und welche Komponenten eingesetzt wurden. Die verwendeten Addierer in Abbildung 8.2 stellen die Signalquellen und den Interferenzpunkt, den Ort der Superposition, der beiden Schwebungssignale $b_1(t)$ und $b_2(t)$ da. Für die Einstellung unterschiedlicher Interferenzpunkte wurden HF-Übertragungsmedien mit einer stufenlosen veränderlichen Leitungslänge eingesetzt.

8.2 Experimentalaufbau

Abbildung 8.2 zeigt den schematischen Aufbau des Experiments. Die unterschiedlichen Signallaufzeiten zwischen dem Interferenzpunkt und den Signalquellen wurden mittels Line-Stretchern [36] eingestellt. Die notwendigen Grundsignale für die Schwebungssignale $b_1(t)$ und $b_2(t)$ (Gleichung (5.1) und (5.2)):

$$b_1(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_S t) \sin(2\pi f_{T_1} t) \quad (\text{Wdh. Gl. (5.1)})$$

$$b_2(t) = A_2 \cdot \cos(2\pi f_S t) \sin(2\pi f_{T_2} t) \quad (\text{Wdh. Gl. (5.2)})$$

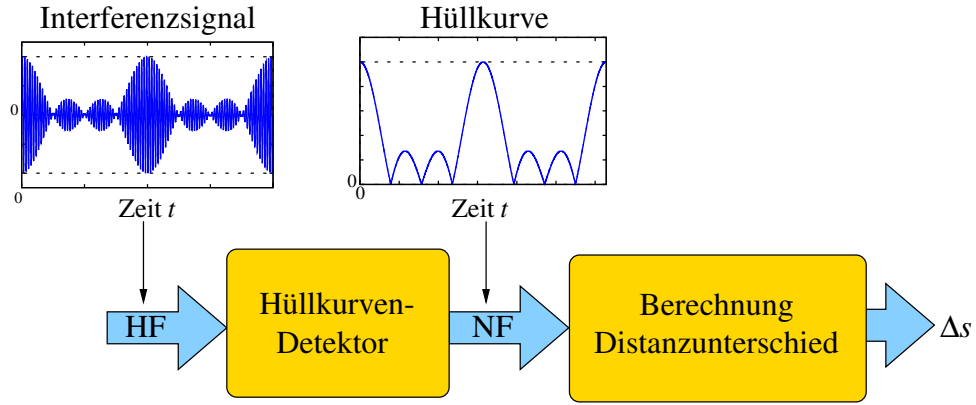


Abbildung 8.1: Prinzipschaltbild der Rekonstruktion des Distanzunterschieds Δs .

wurden mit dem Entwicklerboard [3] für den 4-Kanal DDS-Chip AD9959 [4] – Direct Digital Synthesizer (DDS) – von Analog Devices erzeugt. Die Schwebungssignale selbst wurden nicht über die Multiplikation des Sinus-Terms für die Trägerfrequenzen f_{T_i} und des Kosinus-Terms für die Schwebungsfrequenz f_S generiert, sondern durch die Ausnutzung des Additionstheorems (Gleichung (8.1)) zur Bildung der Summe mittels eines Addierers (Mini-Circuit ZFSC-2-1):

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \right) \quad . \quad (8.1)$$

Der verwendete DDS-Chip AD9959 ermöglichte die Erzeugung unterschiedlicher Frequenzen mit einer sehr feinen Abstufung (32 Bit) über einen weiten Frequenzbereich sowie einer Phasensynchronisation der einzelnen Kanäle zueinander. Zudem wurden alle benötigten Signale durch ein und dieselbe Taktquelle getrieben, wodurch ein eventuell auftretender Frequenzjitter keinen Einfluss auf die Signalerzeugung hatte. Durch Anpassung der Phase der einzelnen erzeugten Signale konnten mögliche Asymmetrien in den Signallaufzeiten, zum Beispiel durch nicht exakt realisierbare gleiche Kabellängen, ausgeglichen werden. Die durch den DDS-Chip erzeugten Signale:

$$\begin{aligned} b_{1/1}(t) &= \sin(2\pi(f_{T_1} - f_m)t) \quad \text{und} \quad b_{1/2}(t) = \sin(2\pi(f_{T_1} + f_m)t) \quad \text{sowie} \\ b_{2/1}(t) &= \sin(2\pi(f_{T_2} - f_m)t) \quad \text{und} \quad b_{2/2}(t) = \sin(2\pi(f_{T_2} + f_m)t) \end{aligned}$$

wurden durch die beiden Addierer zu den Schwebungssignalen:

$$b_1(t) = b_{1/1}(t) + b_{1/2}(t) \quad \text{und} \quad b_2(t) = b_{2/1}(t) + b_{2/2}(t)$$

zusammengesetzt. Die generierten Schwebungssignale durchliefen zum einen die Strecke s_1 und zum anderen s_2 . Beide Strecken wurden durch die jeweiligen Line-Stretcher variiert,

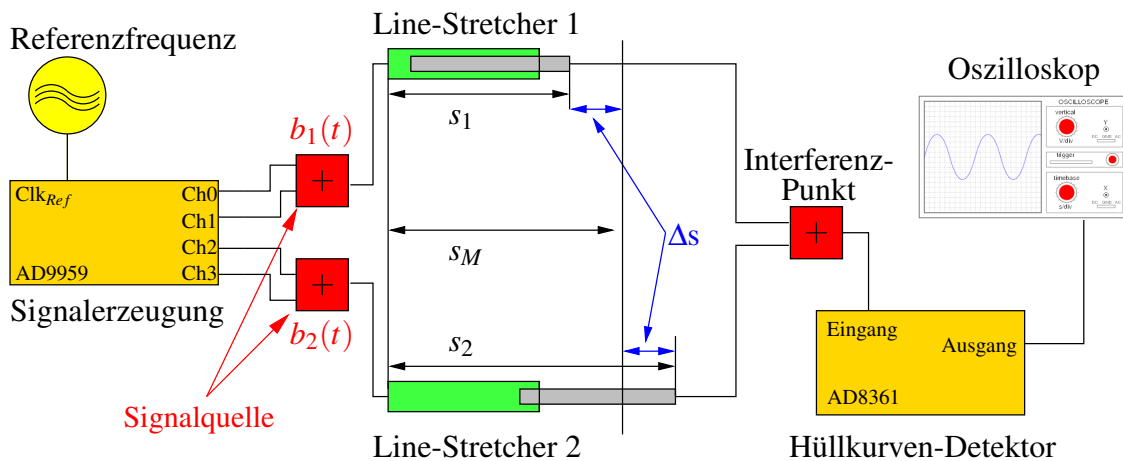


Abbildung 8.2: Schematische Struktur des Experimentalaufbaus.

wodurch ein Laufzeitunterschied zwischen den beiden Pfaden entstand und sich somit unterschiedliche Interferenzmuster am Interferenzpunkt ausbildeten. Die Variation der Längen der Line-Stretcher erfolgte gegenläufig, so dass bei einer Vergrößerung von $s_1 = s_M + \Delta s$ gleichzeitig $s_2 = s_M - \Delta s$ um den selben Betrag verkürzt wurde. Der Interferenzpunkt leitete das Interferenzsignal an den Hüllkurven-Detektor (Abschnitt 8.3) weiter. Die detektierte Hüllkurve wurde anschließend mit einem Oszilloskop aufgezeichnet und gespeichert. Die gespeicherte Hüllkurve wurde dann abschließend mit einem der beiden Verfahren zur Berechnung des Distanzunterschieds Δs (Abschnitt 10 und 11) mit einem Computer ausgewertet.

8.3 Hüllkurven-Detektor

Der für die experimentelle Validierung der LSB-Methode verwendete Hüllkurven-Detektor (Abbildung 8.3) bestand aus dem Koppelkondensator C1 zur Unterdrückung von Gleichspannungsanteilen im Interferenzsignal und dem Leistungsdetektor AD8361 [2] von Analog Devices zur Detektion der Hüllkurve. Der AD8361 liefert eine dem Trägersignal (HF-Signal) linear folgende Effektivgleichspannung. Diese Spannung entspricht der Hüllkurve des HF-Signals. Der nachgeschaltete Tiefpass aus dem Widerstand R1 und dem Kondensator C2 unterdrückte eventuell auftretende hochfrequente Störsignale zur weiteren Glättung der Hüllkurve. Als zusätzliche Beschaltung benötigt der Leistungsdetektor AD8361 lediglich eine 2.7 V bis 5.5 V Gleichspannungsversorgung. Er besitzt eine ausgezeichnete Stabilität gegenüber Temperaturdrift und arbeitet über einen weiten Bereich mit einem linearen Übertragungsverhalten. Auf Grund seiner Breitbandigkeit (bis zu 2.5 GHz) konnte der Leistungsdetektor AD8361 für verschiedene Trägerfrequenzen eingesetzt werden. Der am Ausgang des Leistungsdetektors angeschlossene Tiefpass musste nur auf die einzusetzenden Modulationsfrequenzen abgestimmt werden, um diese ungehindert passieren zu lassen und auf

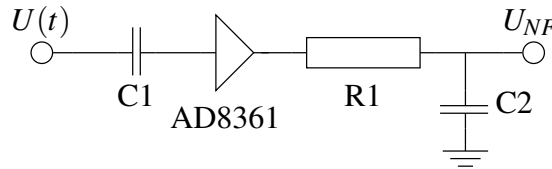


Abbildung 8.3: Blockschaltbild des Hüllkurven-Detektors.

der anderen Seite eine ausreichend hohe Filterung von hochfrequenten Störsignalen auf der Hüllkurve zu gewährleisten.

Der Detektor bot somit die Eigenschaften eines sehr einfachen Aufbaus bei geringem Stromverbrauch (3.3 mW bei 3 V Spannungsversorgung), einer hohen Stabilität gegenüber Temperaturdrift und des universellen Einsatzes für verschiedene Trägerfrequenzen. Zur Nutzung des Leistungsdetektors AD8361 wurde dessen Entwicklungsboard mit einem separat nachgeschalteten Tiefpass mit der Grenzfrequenz von 3.2 kHz verwendet.

8.4 Ausbreitungsgeschwindigkeit

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Signalen im Vakuum erfolgt näherungsweise mit Lichtgeschwindigkeit: $c = 299\,792\,458$ m/s. Werden dieselben Signale über ein anderes Medium übertragen, zum Beispiel einem Koaxialkabel oder Luft, verringert sich ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der Signalausbreitung in Koaxialkabeln reduziert sich durch die Permittivität (elektrische Leitfähigkeit) des verwendeten Dielektrikums Voll-Polyethylen auf etwa 2/3 der Lichtgeschwindigkeit [31]. Zur Berechnung der reduzierten Übertragungsgeschwindigkeit wird der *Verkürzungsfaktor* (VKF) aus Gleichung (8.2) verwendet, dem Kehrwert der Quadratwurzel der relativen Permittivität ϵ_r des Kabeldielektrikums:

$$VKF = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad . \quad (8.2)$$

Für das als Kabeldielektrikum oft verwendete Polyethylen (PE) mit $\epsilon_r = 2.25$ ergibt sich ein Verkürzungsfaktor von $VKF \approx 0.67$. Die Übertragungsgeschwindigkeit v_{VKF} im Koaxialkabel ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned} v_{VKF} &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot c \\ &= \frac{1}{\sqrt{2.25}} \cdot c \\ &= \frac{2}{3} \cdot c \quad . \end{aligned}$$

Die relative Permittivität ϵ_r von Luft ist annähernd 1 ($\epsilon_r \approx 1$), wodurch die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Luft näherungsweise der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum entspricht. Die verwendeten Line-Stretcher nutzten Luft als Isolator. Somit kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit in den Line-Stretchern mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum angesetzt werden. Für den Experimentalaufbau ergab sich daraus folgende Situation: Die Signale erfuhren zwar auf den Koaxialkabeln eine Verringerung der Ausbreitungsgeschwindigkeit, diese hatte aber keinen Einfluss auf die durchgeführten Messungen. Alle Zuleitungen zu den Line-Stretchern waren identisch und von gleicher Länge. Der Laufzeitunterschied zwischen den Signalen wurde ausschließlich durch den Längenunterschied der Line-Stretcher verursacht. Da sich die Signale in den Line-Stretchern mit näherungsweise der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ausbreiteten, wurde für alle Berechnungen des Distanzunterschieds Δs die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum mit etwa $3 \cdot 10^8$ m/s verwendet.

9 Experimentelle Validierung:

Ergebnisse

Das vorherige Kapitel beschrieb den verwendeten Versuchsaufbau für die experimentelle Validierung der LSB-Methode. In diesem Kapitel werden jetzt die Ergebnisse der Messungen präsentiert, die zur Ausbildung von Interferenzsignalen durch verschiedene Kombinationen aus Musterfaktoren, globaler Trägerfrequenzen und Distanzunterschieden durchgeführt wurden.

9.1 Setup

Für den Nachweis des Funktionsprinzips der LSB-Methode sind verschiedene Messungen für unterschiedliche Kombinationen aus Musterfaktor k , Distanzunterschied Δs und Trägerfrequenz f_{T_g} durchgeführt und die sich ergebenden Hüllkurven der Interferenzsignale aufgezeichnet worden. Als Trägerfrequenzen wurden die Frequenzen $f_{T_g} = [50, 100, 150]$ MHz gewählt. Die gewählten Frequenzen stellen eine geeignete Schnittmenge zwischen der einstellbaren Längenänderung der Line-Stretcher (0 bis 30 cm) und der erzeugbaren Frequenzen des DDS-Chips AD9959 (Max. 200 MHz) dar. Für jede gewählte Trägerfrequenz wurde somit sichergestellt, dass über die mögliche Längenänderung der Line-Stretcher eine Phasenverschiebung um mehrere Grad zur Erzeugung von signifikanten Musteränderungen sichergestellt war. Für den Musterfaktor k , die Schwebungsfrequenz f_s und die Modulationsfrequenz f_m mit $f_m = f_s/k$ wurden folgende Werte gewählt:

k	f_s [Hz]	f_m [Hz]
0.25	2.98	11.920
0.50	2.98	5.960
2.00	2.98	1.490
4.00	2.98	0.745

In den Diagrammen 9.3 bis 9.10 werden für verschiedene Kombinationen aus k , Δs und f_{T_g} repräsentative Interferenzsignale dargestellt, um den Einfluss der drei Parameter auf die Form der Hüllkurven zu verdeutlichen. Die dargestellten Kurven sind die nach dem Hüllkurven-Detektor aufgenommenen Interferenzsignale. Sie sind lediglich vor der Abtastung mit einem

Tiefpass der Grenzfrequenz 3.2 kHz gefiltert und nach der Abtastung auf eine maximale Amplitude von 2 V skaliert worden. Für die Abtastung wurden für die verschiedenen Musterfaktoren folgende Abtastfrequenzen verwendet:

Musterfaktor	Abtastfrequenz
0.25	12.5 kHz
0.50	5.0 kHz
2.00	5.0 kHz
4.00	2.5 kHz

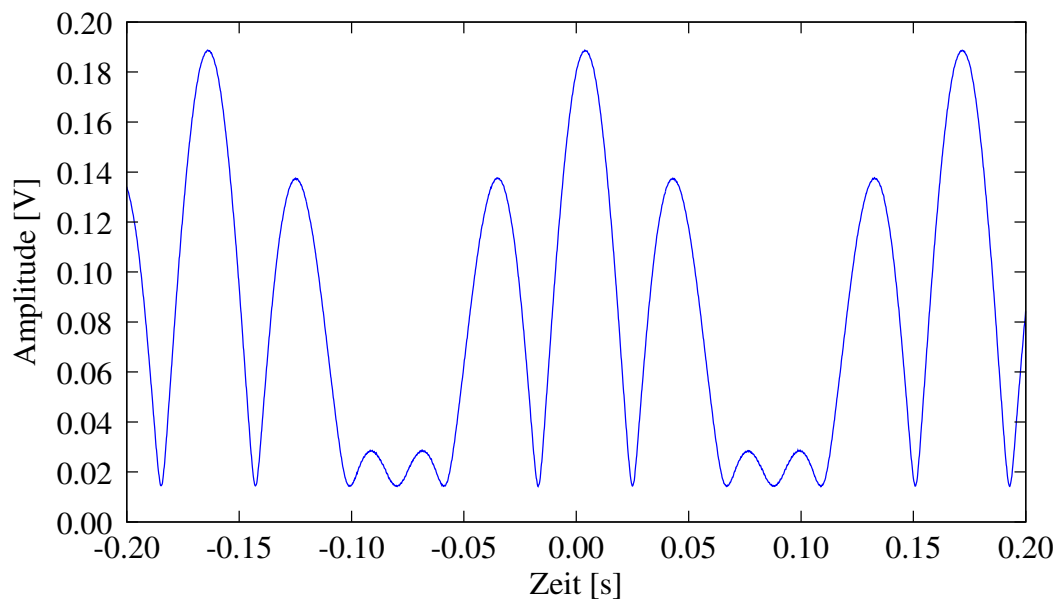
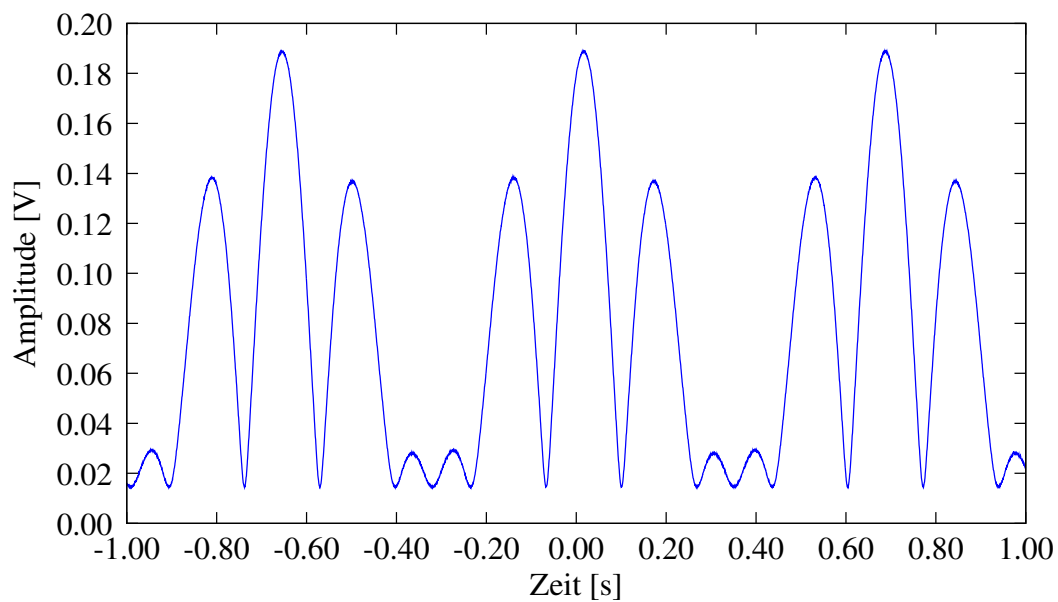
Die genutzten Abtastfrequenzen waren somit um den Faktor 4000 oder mehr kleiner als die verwendeten Trägerfrequenzen ($50 \text{ MHz}/12.5 \text{ kHz} = 4000$).

Um die Auswirkungen der verschiedenen Kombinationen von k , Δs und f_{T_g} besser zu verdeutlichen, sind in den Abschnitten 9.3 und 9.4 die aufgezeichneten Hüllkurven mit nur jeweils einer Musterperiode abgebildet. Den bestehenden Offset von etwa 180 mV verursachte der eingesetzte Leistungsdetektor AD8361. Er wirkt sich besonders für die Kurve $k=0.25$ mit $f_{T_g} = 150 \text{ MHz}$ (Abbildung 9.7) nachteilig aus. Hier ging die Amplitude des 3. Schwingungsbauchs (v.l.) verloren.

9.2 Änderung des Musterfaktors

Für die Kombinationen aus $k = [0.25, 4.00]$ und der Trägerfrequenz $f_{T_g} = 100 \text{ MHz}$ sind den Abbildung 9.1 und 9.2 zwei unskalierte aber gefilterte Ausgangssignale des Hüllkurven-Detektors stellvertretend dargestellt. Beide Kurven zeigen anschaulich das sich periodisch wiederholende Interferenzmuster. Anhand dieses Beispiels ist eine weitere Eigenschaft deutlich zu erkennen. Beide Musterfaktoren $k=0.25$ und $k=4.00$ führen zum selben Interferenzmuster. Sie unterscheiden sich aber in ihrer Zeitauflösung. So wiederholt sich das Grundmuster für den Musterfaktor $k=0.25$ bereits nach $T=0.168 \text{ s}$, wohingegen sich das Grundmuster für $k=4.00$ erst nach $T=0.672 \text{ s}$ wiederholt. Das aufgeführte Beispiel zeigt somit auch die Auswirkung des Musterfaktors k auf die Länge der Musterperiode T_M . Weiterhin erklären sich auch aus den Längen der Grundmuster die verschiedenen verwendeten Abtastfrequenzen. Abtastfrequenz und Musterfaktor stehen somit in einem proportionalen Verhältnis zueinander. Für die vier verschiedenen Musterfaktoren ergeben sich folgende Musterperioden:

k	$T_M [\text{s}]$
0.25	0.167
0.50	0.167
2.00	0.336
4.00	0.672

Abbildung 9.1: Hüllkurve für $k=0.25$ und $f_{T_g}=100$ MHz.Abbildung 9.2: Hüllkurve für $k=4.00$ und $f_{T_g}=100$ MHz.

9.3 Änderung des Distanzunterschieds

Die Abbildungen 9.3 bis 9.6 zeigen den Einfluss des Distanzunterschieds Δs für verschiedene Musterfaktoren auf die Ausbildung der Hüllkurve bei der Trägerfrequenz $f_{T_g} = 100$ MHz. Zu jedem Musterfaktor:

- $k = 0.25$ (Abbildung 9.3),
- $k = 0.50$ (Abbildung 9.4),
- $k = 2.00$ (Abbildung 9.5) und
- $k = 4.00$ (Abbildung 9.6)

sind in den Abbildungen exemplarisch die drei Distanzunterschiede $\Delta s = [0, 5, 10]$ cm dargestellt. Der Musterfaktor k drückt sich in der Anzahl der Schwingungsbäuche und Knoten pro Musterperiode sowie der Periodenlänge aus. Alle Kurven zeigen deutlich, dass sich die Schwingungsbäuche durch die Distanzunterschiedsänderung δs verändern. Während die beiden Außenbäuche einer Musterperiode unverändert bleiben, erhöhen beziehungsweise vermindern sich die dazwischen liegenden Schwingungsbäuche. Aber immer in dem Verhältnis, dass sich bei einer Erhöhung des einen Bauches der anderer vermindert. Weiterhin ist zu erkennen, dass sich die Musterfaktoren $k = 0.25$ und $k = 4.00$ sowie $k = 0.50$ und $k = 2.00$ spiegelsymmetrisch verhalten. Ein Schwingungsbauch, der bei einem Musterfaktor kleiner 1 wächst, vermindert sich für den korrelierenden Musterfaktor größer 1. Entsprechendes gilt für einen sich vermindern den Schwingungsbauch des Musterfaktors kleiner 1 und seinem korrelierend wachsenden Schwingungsbauch bei einem Musterfaktor größer 1.

Bei der gewählten Trägerfrequenz von $f_{T_g} = 100$ MHz beträgt eine Phasenänderung von 1° einer Distanzunterschiedsänderung um $\delta s \approx 8.3$ mm. Es kann somit vereinfacht angesetzt werden, dass 1 cm Distanzunterschiedsänderung etwa 1° Phasenänderung hervorruft. Rückwirkend bedeutet dies, dass die ausgewählten Distanzunterschiede Δs Phasenverschiebungen von etwa $\Delta\varphi \approx [0, 5, 10]^\circ$ verursachen. Anhand der dargestellten Hüllkurven kann subjektiv abgeschätzt werden, dass bereits 1° Phasenverschiebung eine ausreichend signifikante Änderung des Interferenzmusters zu deren Unterscheidung erzeugt. Aus dem Vergleich der Musterfaktoren zueinander ist weiterhin zu erkennen, dass, je kleiner der Musterfaktor ist, desto deutlicher die Änderung der Interferenzmuster zwischen den einzelnen Distanzunterschieden ausfällt.

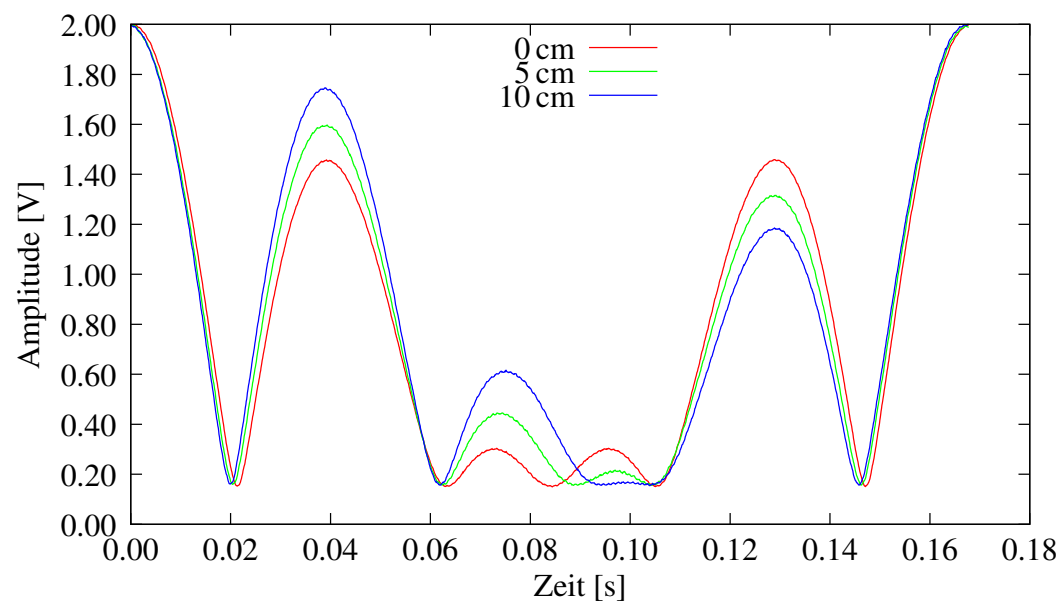


Abbildung 9.3: Hüllkurve für $k=0.25$ und die Distanzunterschiede $\Delta s = [0, 5, 10]$ cm.

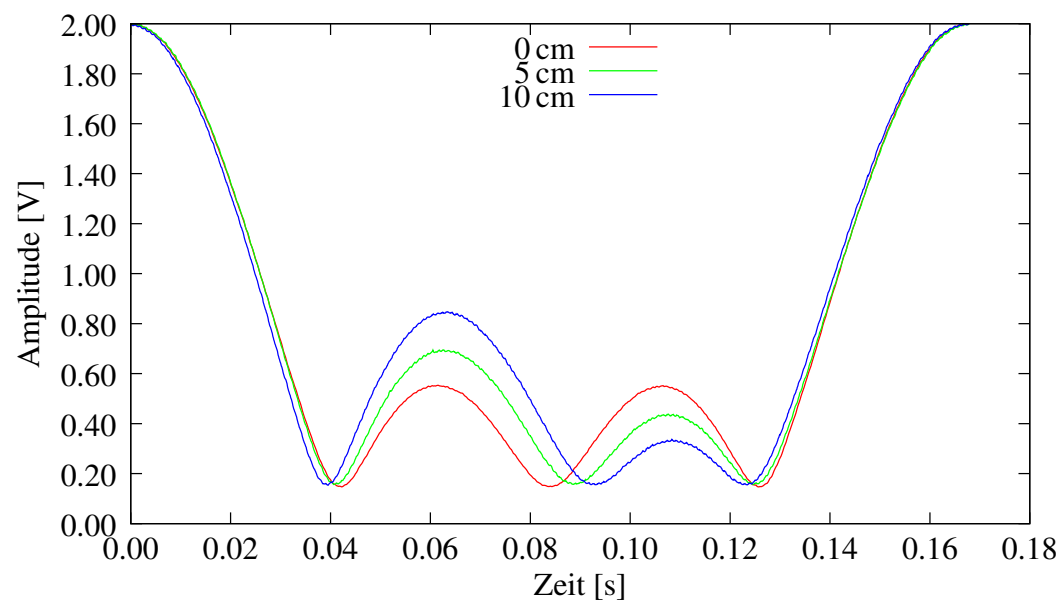


Abbildung 9.4: Hüllkurve für $k=0.50$ und die Distanzunterschiede $\Delta s = [0, 5, 10]$ cm.

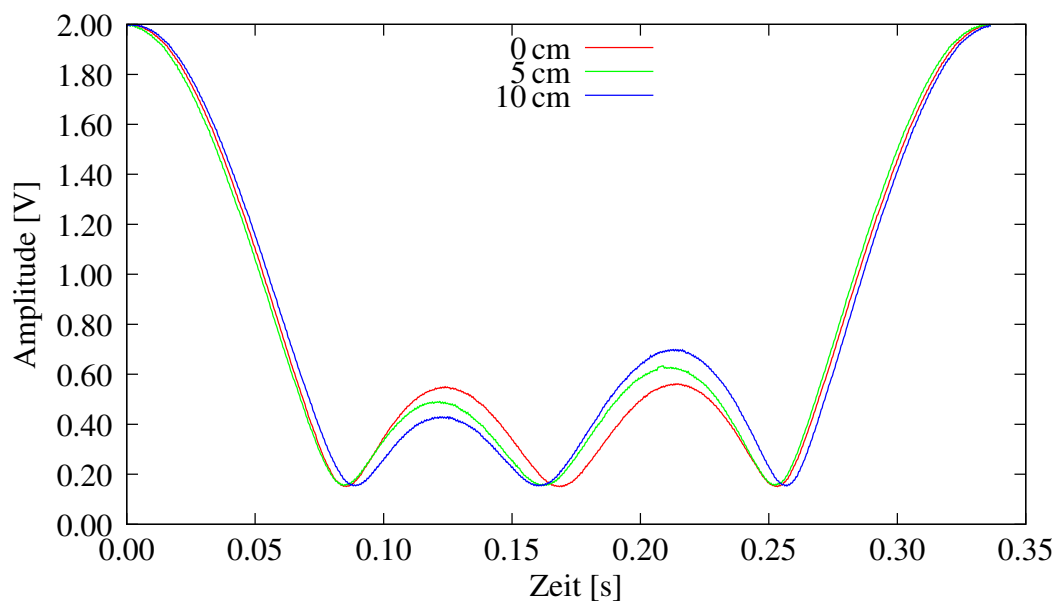


Abbildung 9.5: Hüllkurve für $k = 2.00$ und die Distanzunterschiede $\Delta s = [0, 5, 10]$ cm.

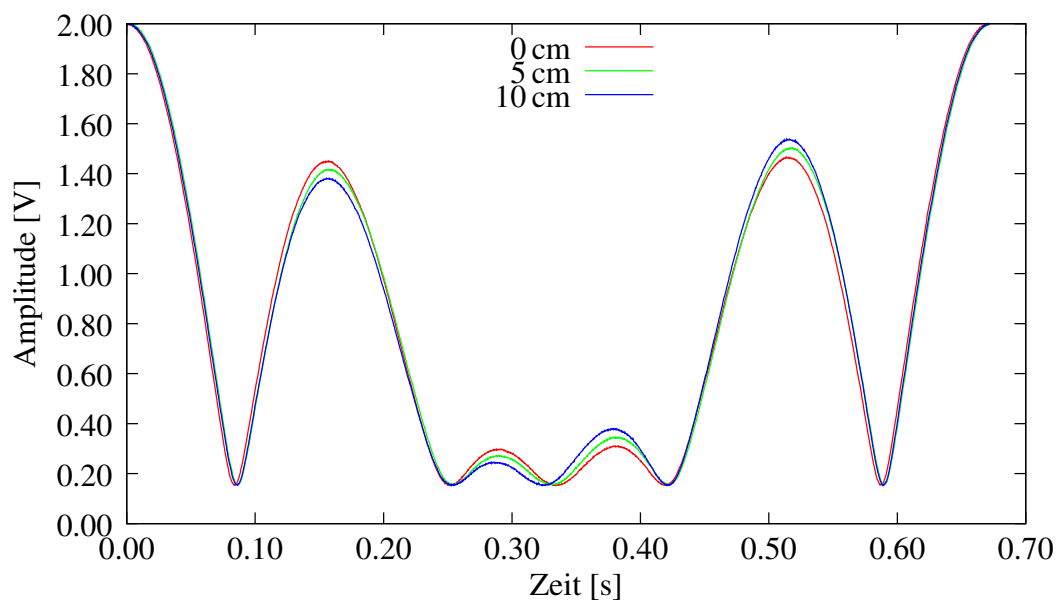


Abbildung 9.6: Hüllkurve für $k = 4.00$ und die Distanzunterschiede $\Delta s = [0, 5, 10]$ cm.

9.4 Änderung der Trägerfrequenz

Die in den Abbildungen 9.7 bis 9.10 dargestellten Hüllkurven sind vergleichbar mit den Ergebnissen aus Abschnitt 9.3. Pro Abbildung sind jetzt nicht die Änderungen in Bezug auf die Distanzunterschiedsänderung δs aufgetragen, sondern aufgrund der verschiedenen Trägerfrequenzen $f_{T_g} = [50, 100, 150]$ MHz. Gezeigt werden die Unterschiede in der Stärke der Änderung – Erhöhung beziehungsweise Verminderung – der Schwingungsbäuche in Abhängigkeit der Trägerfrequenz f_{T_g} bei gleichem Distanzunterschied $\Delta s = 10$ cm. Aus den Kurven ist abzulesen, dass je höher die Trägerfrequenz f_{T_g} ist, umso stärker ist die Veränderung der Schwingungsbäuche bei gleichem Distanzunterschied Δs und demzufolge auch die Änderung des Phasenwinkels. Es ist weiterhin erkennbar, dass der Einfluss der Trägerfrequenz f_{T_g} unabhängig vom Musterfaktor k ist. Auch hier ist wie bei den Messungen zum Distanzunterschied Δs zu erkennen, dass die Stärke der Änderung des Interferenzmusters zwischen zwei verschiedenen Trägerfrequenzen bei den beiden Musterfaktoren kleiner 1 deutlicher ausfällt, als bei den beiden Musterfaktoren größer 1.

9.5 Zusammenfassung

Die Messungen zum Musterfaktor, zum Distanzunterschied und zur Trägerfrequenz belegen deutlich, dass sich Interferenzmuster mit den Eigenschaften, wie sie in der Theorie zur LSB-Methode (Abschnitt 5 und 6) formuliert sind, ausbilden. Es wurde nachgewiesen, dass sich das ausbildende Interferenzmuster zwischen zwei verschiedenen Interferenzpunkten ändert und dadurch für jeden Interferenzpunkt ein individueller Distanzunterschied ableitbar war. Weiterhin zeigten die Messungen auch deutlich den Einfluss der Trägerfrequenz. Denn je größer die Trägerfrequenz war, desto kleinere Distanzunterschiedsänderung führten bereits zu einer signifikanten Änderung des Interferenzmusters. Der Nachweis der beiden Eigenschaften:

- Änderung des Interferenzmusters aufgrund Änderung des Distanzunterschieds und
- dass sich das Auflösungsvermögen umgekehrt proportional zur Trägerfrequenz verhält

belegten nachhaltig, dass die LSB-Methode den Distanzunterschied eines Interferenzpunkts zu zwei Signalquellen *direkt* aus dem Interferenzsignal ableiten kann und dass auch kleine Distanzunterschiede im Zentimeter- oder Millimeterbereich durch die Auswertung eines *niederfrequenten* Signals bestimmbar sind.

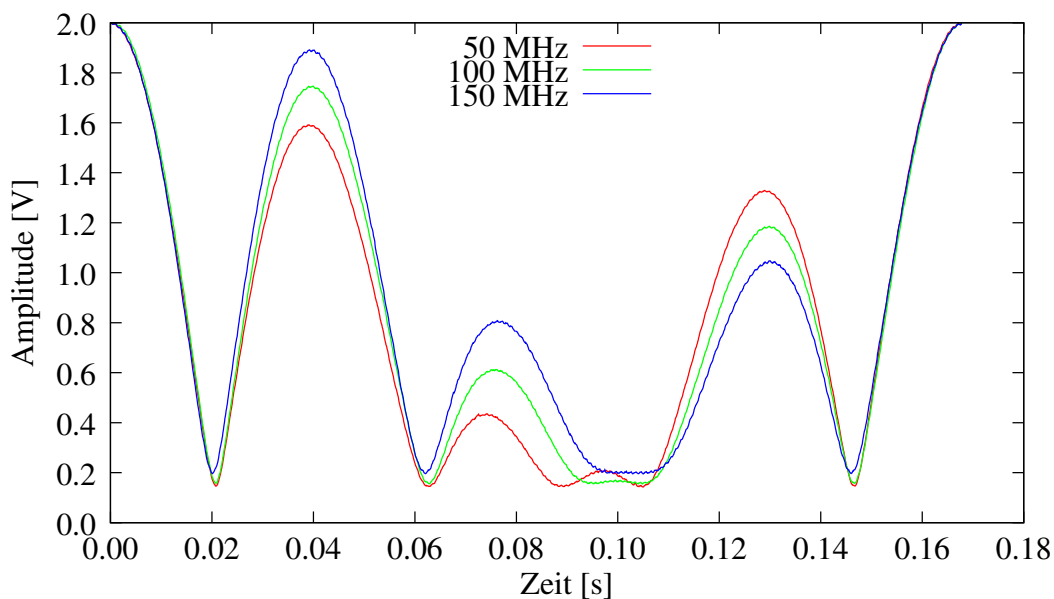


Abbildung 9.7: Hüllkurve für $k=0.25$ bei gleichem Distanzunterschied Δs und den Trägerfrequenzen $f_{T_g} = [50, 100, 150]$ MHz.

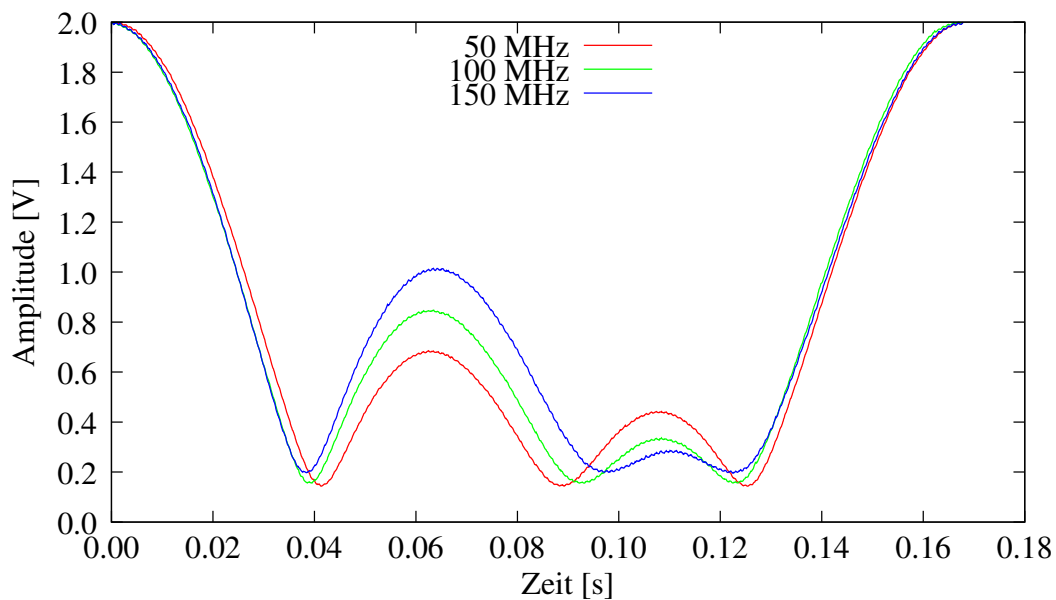


Abbildung 9.8: Hüllkurve für $k=0.50$ bei gleichem Distanzunterschied Δs und den Trägerfrequenzen $f_{T_g} = [50, 100, 150]$ MHz.

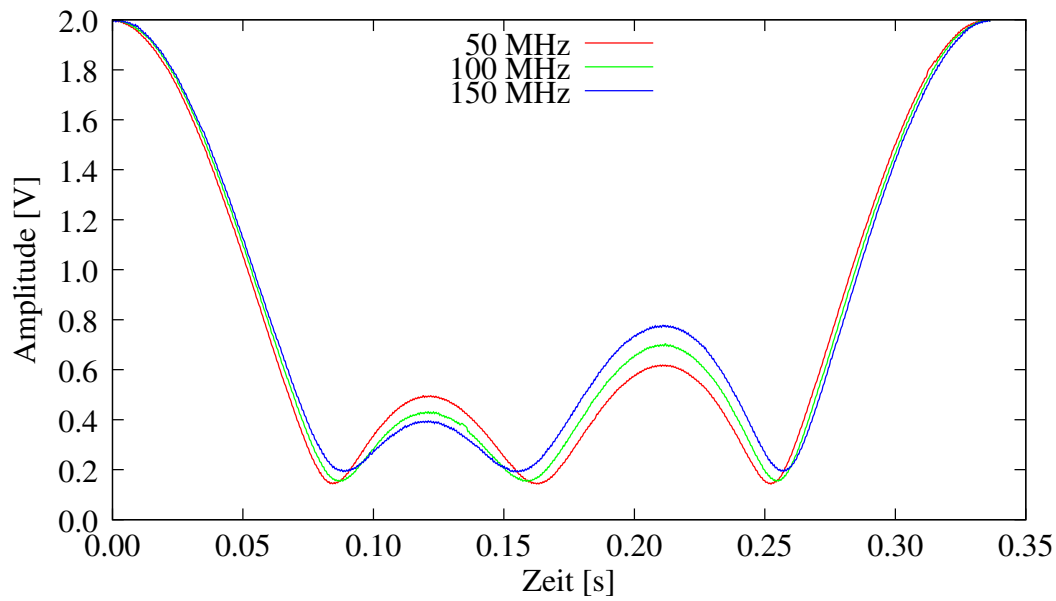


Abbildung 9.9: Hüllkurve für $k=2.00$ bei gleichem Distanzunterschied Δs und den Trägerfrequenzen $f_{T_g} = [50, 100, 150]$ MHz.

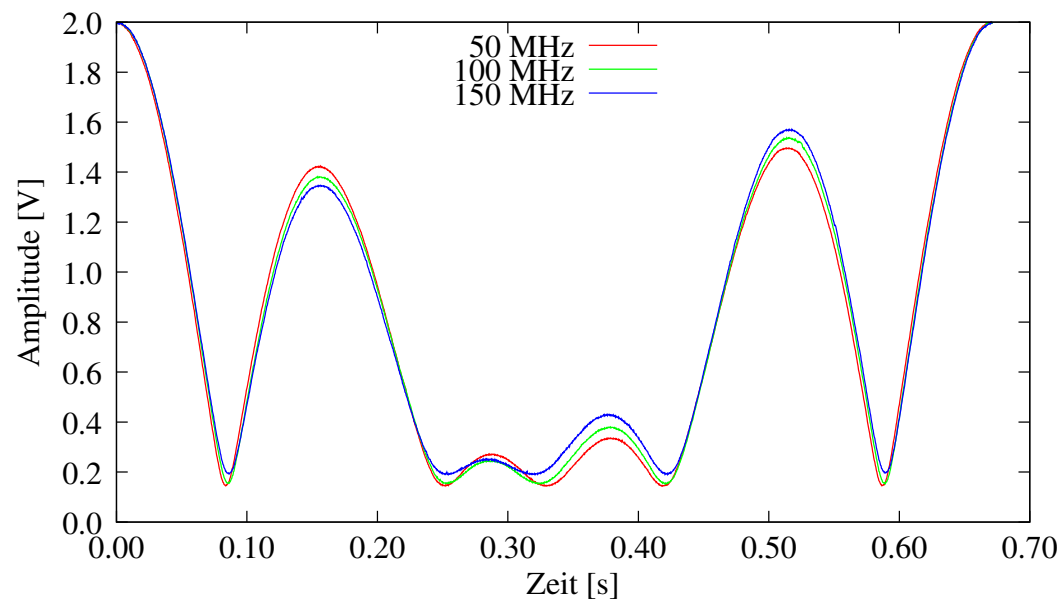


Abbildung 9.10: Hüllkurve für $k=4.00$ bei gleichem Distanzunterschied Δs und den Trägerfrequenzen $f_{T_g} = [50, 100, 150]$ MHz.

10 Berechnungsverfahren: Mustererkennung

Eine Möglichkeit den Distanzunterschied aus der empfangenen Hüllkurve zu ermitteln, stellt die Mustererkennung dar. Da sich für jeden Distanzunterschied ein individuelles Muster der Hüllkurve ausbildet, kann durch Vergleich des Musters der Hüllkurve mit einer Anzahl verschiedener Referenzmuster das am besten übereinstimmende Referenzmuster gesucht werden. Der mit dem gefundenen Referenzmuster verknüpfte Distanzunterschied entspricht dann näherungsweise dem tatsächlichen Distanzunterschied. Im Idealfall ist der ermittelte Distanzunterschied zwischen dem Interferenzpunkt und den beiden Signalquellen gleich dem tatsächlichen Distanzunterschied.

10.1 Verfahren

Für einen Parametersatz aus Trägerfrequenz f_{T_g} , Schwebungsfrequenz f_s und Modulationsfrequenz f_m werden für den Bereich der Distanzunterschiedsänderung δs ohne Musterwiederholung (Abschnitt 6.7) Referenzmuster mit einer wählbaren Schrittweite – *Granularität* – (Abschnitt 10.1.2) mit der Funktion der Hüllkurve (Gleichung (5.14)):

$$\tilde{r}_{\Delta t}(t) = | 2 \cdot \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t) | \quad (\text{Wdh. Gl. (5.14)})$$

vorausberechnet. Zu jedem Referenzmuster wird dann zur Bestimmung des Distanzunterschieds Δs mittels der *Summe der Quadratischen Differenzen* (Abschnitt 10.1.1) die jeweilige Ähnlichkeit zwischen dem Referenzmuster und dem Muster der Hüllkurve berechnet. Das Referenzmuster mit der größten Ähnlichkeit benennt dann den Distanzunterschied Δs .

Das verwendete Verfahren ist somit zu den symbolverarbeitenden Verfahren zu zählen, die anhand vorgegebener Muster diskrete Strukturen oder Teilmengen einer diskreten Struktur identifizieren. Derartige Verfahren werden unter dem Begriff *Pattern Matching* [38] (englisch für Musterabgleich) zusammengefasst. Da das verwendete Verfahren das Referenzmuster mit der besten Übereinstimmung sucht und auswählt, ist es ein Verfahren nach dem *Best-fit*-Prinzip des Pattern Matching.

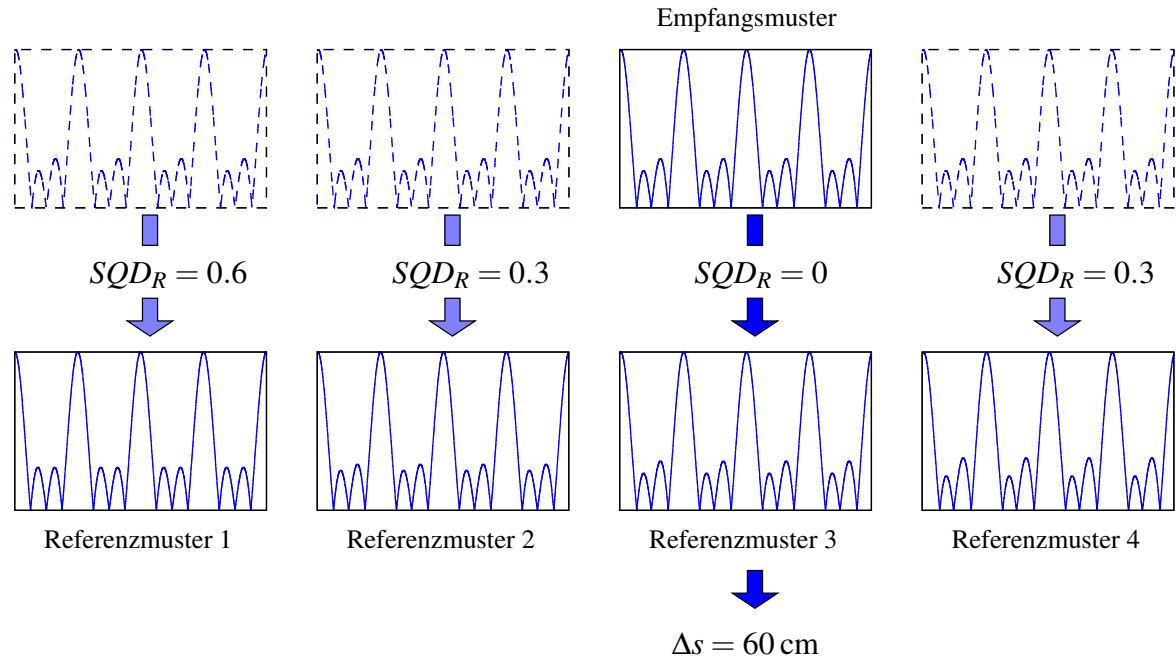


Abbildung 10.1: Verfahren der Mustererkennung durch Vergleich der Hüllkurve des Interferenzsignalpatterns mit den Hüllkurven der Referenzmuster.

10.1.1 Summe der Quadratischen Differenzen

Bei der Berechnung der *Summe der Quadratischen Differenzen* (SQD) [1] werden die Quadrate der Differenzen jedes Punkts der diskreten Punktfolge a mit dem jeweiligen korrespondierenden Punkt der diskreten Punktfolge b aufsummiert:

$$SQD := \sum_{i=1}^N (a_i - b_i)^2 \quad . \quad (10.1)$$

Je dichter sich der SQD -Wert der Null annähert, desto ähnlicher sind sich die beiden Punktfolgen. Bei $SQD = 0$ sind beide Punktfolgen identisch (Abbildung 10.1). Während der Auswertung der Hüllkurve des Interferenzsignals $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ (Gleichung (5.14)):

$$\tilde{r}_{\Delta t}(t) = | 2 \cdot \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t) | \quad , \quad (\text{Wdh. Gl. (5.14)})$$

wird zwischen der Hüllkurve und jedem Referenzmuster M_R der SQD_R -Wert berechnet:

$$SQD_R = \sum_{i=1}^N (r_{\Delta s_i} - M_{R_i})^2 \quad \text{mit} \quad R = 1, \dots, m \quad m : \text{Anzahl Referenzmuster.} \quad (10.2)$$

Der kleinste SQD_R -Wert benennt das Referenzmuster mit der größten Ähnlichkeit und somit den anzunehmenden Distanzunterschied Δs .

10.1.2 Granularität

Die Genauigkeit der Bestimmung des Distanzunterschieds Δs hängt hauptsächlich von der gewählten Schrittweite zwischen den einzelnen vorausberechneten Referenzmustern ab. Die Schrittweite wird als Granularität p bezeichnet und ist eine Länge, zum Beispiel Millimeter.

$$p = \Delta s_{i+1} - \Delta s_i \quad (10.3)$$

Je feiner die Granularität, desto genauer kann der Distanzunterschied Δs ermittelt werden. Eine sehr kleine Granularität führt auf der anderen Seite aber auch zu einem erhöhten Rechenaufwand für die Berechnung der Ähnlichkeit (erhöhte Anzahl an Referenzmustern) und kann weiterhin zu multiplen Lösungen führen. Multiple Lösungen entstehen durch Rundungsfehler oder dadurch, dass die Genauigkeit des SQD_R -Werts auf Grund fest limitierter Nachkommastellen begrenzt ist. Aus einem Satz multipler Lösungen ist es aber beispielsweise möglich mittels linearer Interpolation, die Genauigkeit des Distanzunterschieds weiter zu verbessern.

10.1.3 Berechnungsablauf

Die Berechnung des Distanzunterschieds Δs aus dem Interferenzsignal $r_{\Delta}(t)$ erfolgt nach folgendem Ablauf:

-
1. Vorausberechnung von Referenzmustern für einen festen Parametersatz aus Trägerfrequenz f_{T_g} , Schwebungsfrequenz f_s , Modulationsfrequenz f_m und Granularität p mit der Funktion der Hüllkurve (Gleichung (5.14)) für den Bereich der Distanzunterschiedsänderung δs ohne Musterwiederholung.
 2. Aus dem Interferenzsignal wird dessen Hüllkurve bestimmt und aus dieser eine Musterperiode T_M extrahiert. Der erhaltene Kurvenabschnitt wird durch Skalierung der Amplituden an das Amplitudenniveau der Referenzmuster angepasst.
 3. Für jedes berechnete Referenzmuster wird der SQD_R -Wert berechnet.
 4. Der kleinste SQD_R -Wert identifiziert das Referenzmuster mit der größten Ähnlichkeit und somit den anzunehmenden Distanzunterschied Δs .

Die vorausberechneten Referenzmuster werden in einem entsprechenden Datenspeicher vorgehalten. Sie können aber auch auf Systemen mit beschränkter Speicherkapazität unter Erhöhung der Berechnungszeit ständig neu berechnet werden.

10.1.4 Randbedingungen

Der Aufwand zur Bestimmung des Distanzunterschieds Δs hängt in erster Linie von der Anzahl der Abtastpunkte und der Granularität ab. Daher sollte die notwendige Anzahl der für die Berechnung des SQD_R -Werts verwendeten Punkte klein gehalten werden. Zu diesem Zweck können die Referenzmuster beispielsweise mit einer wesentlich geringeren Punktzahl berechnet und die empfangene Hüllkurve zusätzlich nochmals nach der Analog-Digital-Wandlung in ihrer Anzahl der Abtastpunkte reduziert werden. Es könnten auch ganze Bereiche der Kurve vollständig ausgeblendet und nur signifikante Abschnitte, zum Beispiel von Schwingungsknoten und Scheitelpunkten von Schwingungsbäuchen, verwendet werden. Ändert sich aber ein Parameter des verwendeten Parametersatzes zur Berechnung der Referenzmuster, sind alle Muster neu zu berechnen. Das Verfahren kann sich somit nur bedingt flexibel auf geänderte Bedingungen, zum Beispiel geänderte Trägerfrequenz f_{T_g} , einstellen.

10.2 Messungen

Nachdem die LSB-Methode bisher experimentell nur in ihrer Wirkungsweise (Abschnitt 9) validiert wurde, wurden nun dedizierte Distanzunterschiede eingestellt und ausgemessen. Aus den Messergebnissen wurde anschließend der Distanzunterschied bestimmt und mit dem eingestellten Distanzunterschied verglichen. Der eingestellte Distanzunterschied wird im Weiteren als *erwarteter* Distanzunterschied Δs_E und der aus den Messergebnissen bestimmte Distanzunterschied als *ermittelter* Distanzunterschied Δs_M bezeichnet. Gemessen wurden einmal der Distanzunterschied an sich (Abschnitt 10.2.1) und das Auflösungsvermögen (Abschnitt 10.2.2) der Mustererkennung.

10.2.1 Distanzunterschied

Zur Bestimmung des Distanzunterschieds Δs_M mit der Mustererkennung wurde der erwartete Distanzunterschied im Bereich von $-15 \text{ cm} \leq \Delta s_E \leq 15 \text{ cm}$ mit einer Distanzunterschiedsänderung von $\delta s = 1 \text{ cm}$ eingestellt (Abbildung 10.2). Die Distanzunterschiedsänderung wurde durch die Längenänderungen der Line-Stretcher nachgebildet. Für einen einzustellenden Distanzunterschied Δs_E wurde ein Line-Stretcher in seiner Länge verkürzt, gleichzeitig aber der zweite Line-Stretcher um die gleiche Länge vergrößert. Jeder eingestellte Distanzunterschied wurde mit den Musterfaktoren $k = [0.25, 0.50, 2.00, 4.00]$ sowie den Trägerfrequenzen $f_{T_g} = [50, 100, 150] \text{ MHz}$ ausgemessen. Eine negativer Distanzunterschied von $\Delta s_E < 0$ bedeutete eine Distanzunterschiedsänderung in Richtung der Signalquelle $b_2(t)$ (Tabelle A.2). Damit wurde die Länge s_2 um die Distanzunterschiedsänderung δs verringert, bei gleichzeitiger Vergrößerung von s_1 um denselben Betrag. Bei einem positiven Distanzunterschied

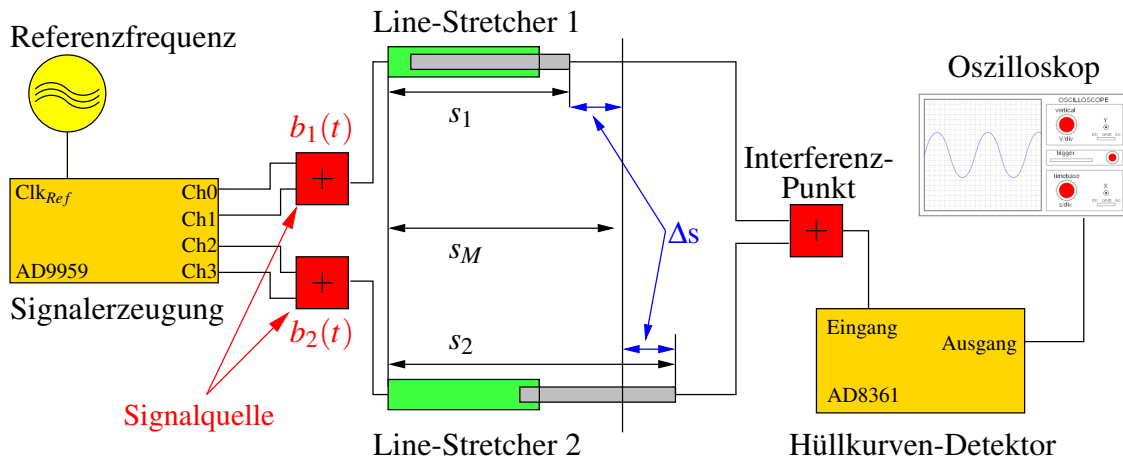


Abbildung 10.2: Schematische Struktur des Experimentalaufbaus.

$\Delta s_E > 0$ wurde die Distanzunterschiedsänderung in Richtung der Signalquelle $b_1(t)$ vorgenommen (Tabelle A.1). Zu jeder eingestellten Kombination aus Distanzunterschied Δs_E , Musterfaktor k und Trägerfrequenz f_{T_g} wurden drei Messkurven aufgenommen. Zu jeder einzelnen Messkurve wurde mit der Mustererkennung der Distanzunterschied Δs_M bestimmt und die drei erhaltenen Einzelwerte anschließend zum Mittelwert $\overline{\Delta s_M}$ zusammengefasst.

Die Bestimmung des Distanzunterschieds Δs_M wurde weiterhin für die drei verschiedenen Granularitäten $p = [1, 2, 5]$ mm durchgeführt. Die in den Tabellen A.1 und A.2 angegebene *absolute Unsicherheit* δe (Gleichung (10.4)) stellt den Betrag der größten Abweichung zwischen dem erwarteten Distanzunterschied Δs_E und den ermittelten Distanzunterschieden Δs_{M_i} aus den drei Einzelwerten dar.

$$\delta e = |\Delta s_E - \Delta s_{M_i}| \quad \text{Mit } i \text{ für den Einzelwert } \Delta s_{M_i} \text{ mit der größten Abweichung zum Erwartungswert } \Delta s_E. \quad (10.4)$$

Die absolute Ungenauigkeit δe ist somit ein Maß für die Güte, also den maximalen Fehler, bei der Bestimmung des Distanzunterschieds Δs_M .

Tabelle 10.1 zeigt zusammenfassend aus allen bestimmten Distanzunterschieden Δs_M für einen Satz aus Musterfaktor k , Granularität p und Trägerfrequenz f_{T_g} die jeweils größte aufgetretene absolute Ungenauigkeit δe . Der angegebene Wert für die absolute Ungenauigkeit δe ist weiterhin nochmals nach positiver $+\delta s$ und negativer $-\delta s$ Distanzunterschiedsänderung unterteilt:

$+\delta s$ = Distanzunterschiedsänderung in Richtung der Signalquelle $b_1(t)$ und

$-\delta s$ = Distanzunterschiedsänderung in Richtung der Signalquelle $b_2(t)$.

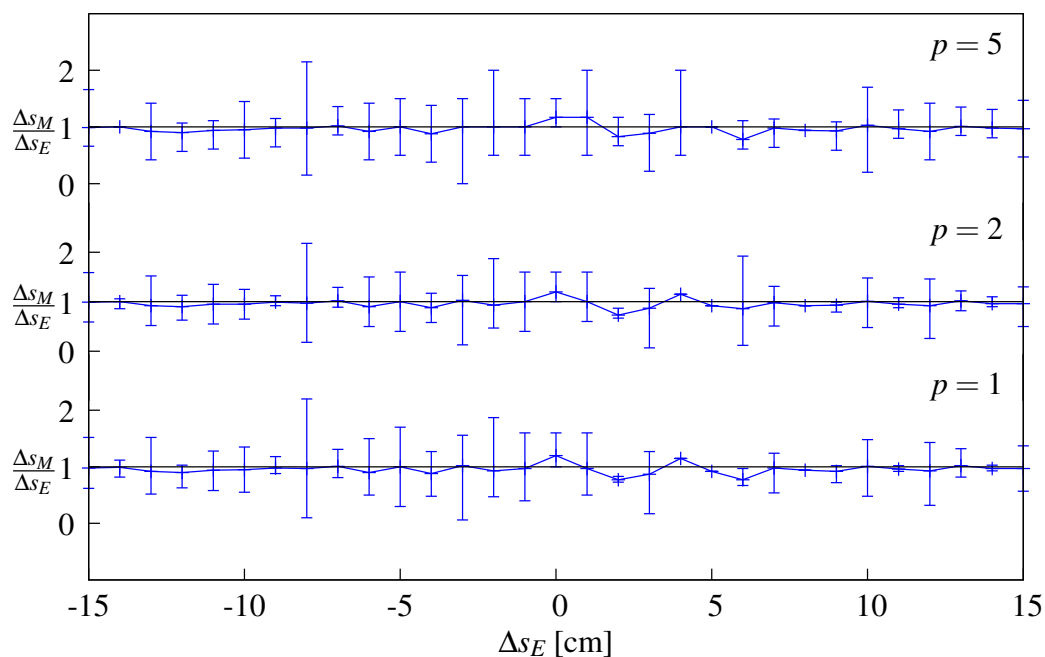
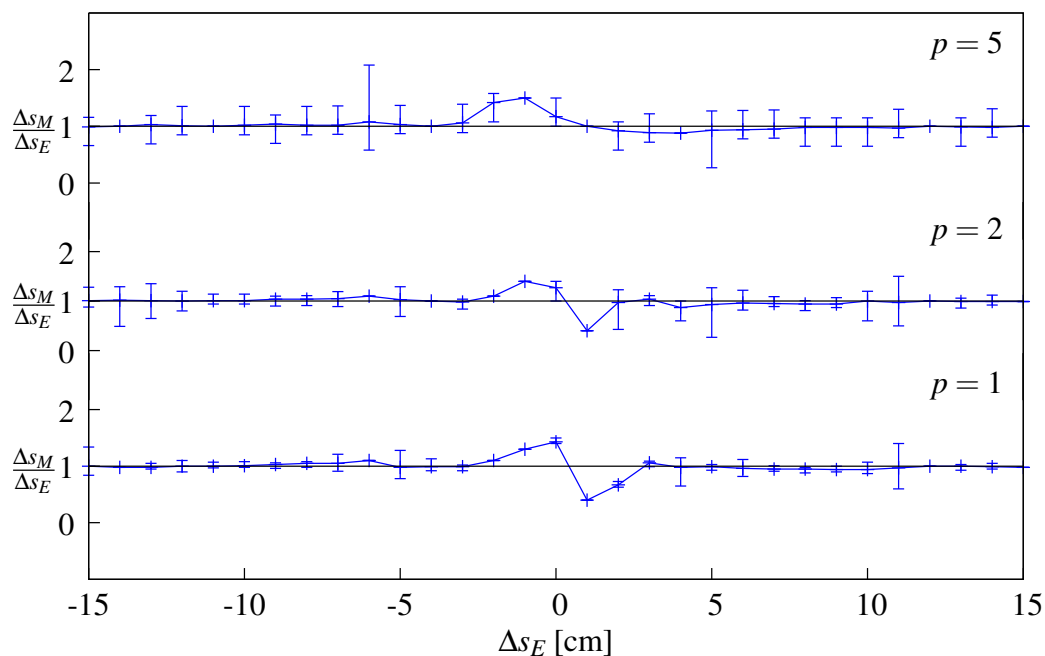
Tabelle 10.1 spiegelt somit einen zu erwartenden maximalen Fehler für jeden Satz aus Musterfaktor k , Granularität p und Trägerfrequenz f_{T_g} als Zusammenfassung über alle eingestell-

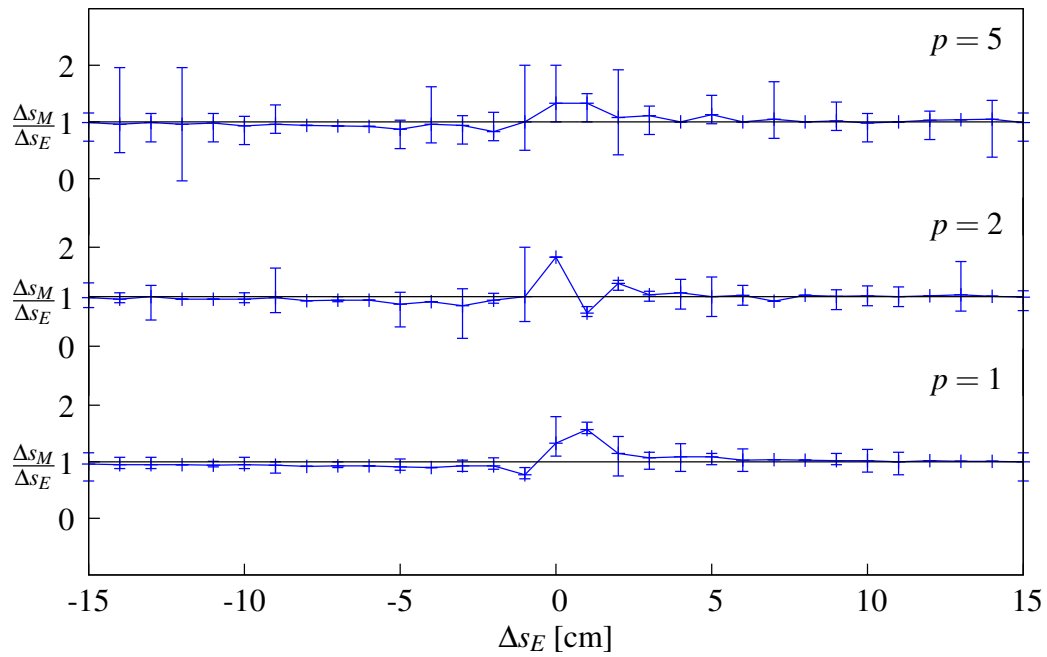
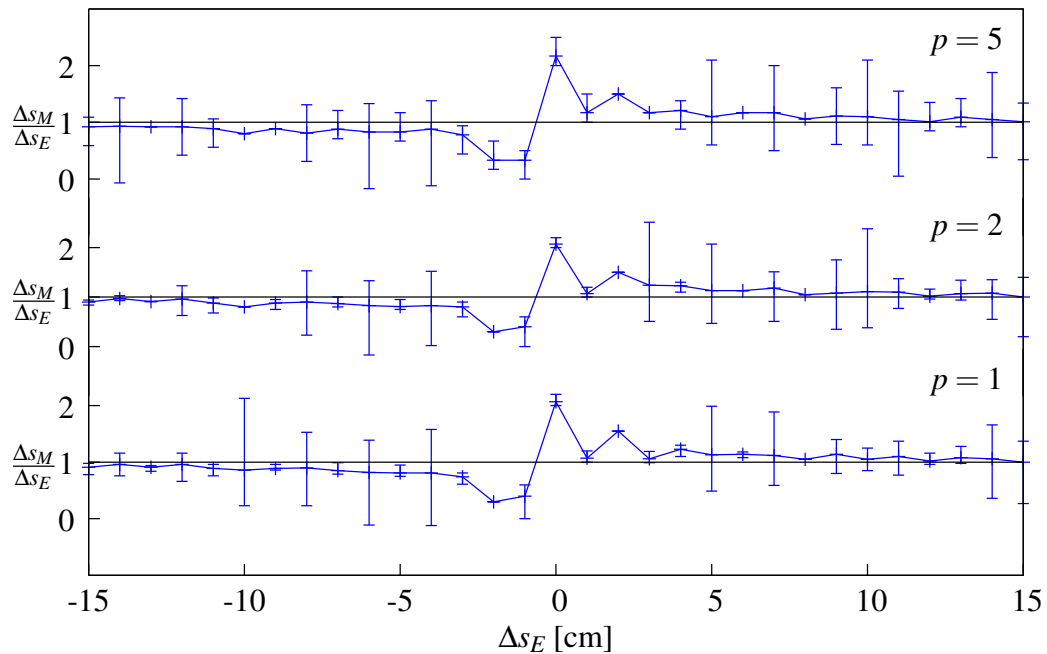
Tabelle 10.1: Die absolute Ungenauigkeit δe der Mustererkennung für positive $+\delta s$ und negative $-\delta s$ Distanzunterschiedsänderung über alle eingestellten Distanzunterschiede Δs_E .

k	p	f_{T_g} [MHz]	δe [mm]	
			$+\delta s$	$-\delta s$
0.25	1	50	15	15
		100	8	8
		150	5	8
	2	50	16	15
		100	8	8
		150	6	10
	5	50	15	15
		100	10	10
		150	5	10
0.50	1	50	7	8
		100	8	6
		150	7	9
	2	50	10	6
		100	10	6
		150	8	8
	5	50	10	15
		100	5	5
		150	5	10
2.00	1	50	8	9
		100	11	6
		150	10	4
	2	50	12	12
		100	14	6
		150	12	4
	5	50	10	15
		100	10	5
		150	10	5
4.00	1	50	16	20
		100	17	14
		150	17	10
	2	50	24	20
		100	24	14
		150	16	10
	5	50	20	20
		100	20	15
		150	15	10

ten Distanzunterschiede Δs_E ($-15 \text{ cm} \leq \Delta s_E \leq 15 \text{ cm}$) wider. Auffällig ist, dass die beiden Musterfaktoren $k = [0.25, 0.50]$ im Durchschnitt bessere Resultate lieferten als die Musterfaktoren $k = [2.00, 4.00]$. Trotz der teilweise recht großen absoluten Ungenauigkeit von bis zu $\delta e = 24 \text{ mm}$ zeigen die Messwerte, dass es realistisch ist, für die LSB-Methode mit den im Experiment verwendeten Parametern einen maximalen Fehler von $\pm 1 \text{ cm}$ anzusetzen. Gestützt wird diese Behauptung durch die deutlich besseren ermittelten Mittelwerte $\overline{\Delta s_M}$ aus den Tabellen A.1 und A.2.

In den Abbildungen 10.3 bis 10.6 sind stellvertretend für alle verwendeten Kombinationen aus Musterfaktor k , Trägerfrequenz f_{T_g} und Granularität p die *normierten* Distanzunterschiede $\Delta s_M / \Delta s_E$ für die Trägerfrequenz $f_{T_g} = 50 \text{ MHz}$ dargestellt. Für die Abbildungen zu den anderen Trägerfrequenzen f_{T_g} sei auf den Abschnitt A.3 im Anhang verwiesen. Bei einem Wert von $\Delta s_M / \Delta s_E = 1$ entspricht der bestimmte Distanzunterschied Δs_M gleich dem eingestellten Distanzunterschied Δs_E . Anhand der Fehlerbalken sind jeweils die größte positive und negative Abweichung zum bestimmten Mittelwert $\overline{\Delta s_M}$ aufgetragen.

Abbildung 10.3: $f_{T_g} = 50$ MHz, $k = 0.25$ Abbildung 10.4: $f_{T_g} = 50$ MHz, $k = 0.50$

Abbildung 10.5: $f_{T_g} = 50$ MHz, $k = 2.00$ Abbildung 10.6: $f_{T_g} = 50$ MHz, $k = 4.00$

10.2.2 Auflösungsvermögen

Um das Auflösungsvermögen, also die kleinste mögliche erkennbare Schrittweite, des verwendeten Experimentalaufbaus sowie das Potential der LSB-Methode zu bestimmen, wurde der Bereich von $-2.0 \text{ cm} \leq \Delta s \leq 2.0 \text{ cm}$ mit der Schrittweite von $\delta s^* = 2 \text{ mm}$ mit den gleichen Parametern wie bei der Distanzunterschiedsmessung (Abschnitt 10.2.1) ausgemessen. Die Änderung des Distanzunterschieds erfolgte ebenfalls analog zu den Distanzunterschiedsmessungen, nur dieses mal mit einer Schrittweite von $\delta s^* = 2 \text{ mm}$. Aus den erhaltenen Messergebnissen (Tabelle A.3) wurden mit den Granularitäten $p = [0.5, 1, 2] \text{ mm}$ die Distanzunterschiede $\overline{\Delta s}$ analog zur Distanzunterschiedsmessung als Mittelwerte berechnet sowie die absoluten Unsicherheiten δe bestimmt. Eine Schrittweite von $\delta s^* = 2 \text{ mm}$ entspricht für die drei verwendeten Trägerfrequenzen jeweils folgende Phasenänderungen $\Delta\varphi$:

f_{T_g} [MHz]	$\Delta\varphi$	δs^* für $\Delta\varphi = 1^\circ$
50	0.12°	1.67 cm
100	0.24°	0.83 cm
150	0.36°	0.55 cm

Die Messungen aus Tabelle A.3 zeigen, dass die Ergebnisse für den Distanzunterschied $\overline{\Delta s}$ und die absolute Ungenauigkeit δe stellenweise zwischen den gewählten Granularitäten p und den Musterfaktoren k stark streuen. Beispielsweise schwankt die absolute Ungenauigkeit δe für die Trägerfrequenz $f_{T_g} = 100 \text{ MHz}$ und die Granularität $p = 0.5 \text{ mm}$ über alle Messungen und alle Musterfaktoren zwischen $0.7 \text{ mm} \leq \delta e \leq 19 \text{ mm}$. Es ist zu berücksichtigen, dass auf Grund des einfachen Experimentalaufbaus die Distanzunterschiede Δs_E selbst nur mit einer Genauigkeit von etwa $\pm 1 \text{ mm}$ eingestellt werden konnten. Die Ergebnisse zeigen weiterhin, dass die verschiedenen Musterfaktoren k teilweise recht abweichende Resultate für ein und denselben Distanzunterschied Δs_E liefern. Beispielsweise schwanken der bestimmte und gemittelte Distanzunterschied $\overline{\Delta s_M}$ zwischen $2.07 \text{ cm} \leq \overline{\Delta s_M} \leq 2.60 \text{ cm}$ und der dazugehörige absolute Fehler δe zwischen $3 \text{ mm} \leq \delta e \leq 8 \text{ mm}$ für die Trägerfrequenz $f_{T_g} = 100 \text{ MHz}$ und der Granularität $p = 0.5 \text{ mm}$ beim Distanzunterschied $\Delta s_E = 2.0 \text{ cm}$.

Im Gegensatz zur theoretischen Erwartung, lieferten die Messungen mit der Trägerfrequenz $f_{T_g} = 150 \text{ MHz}$ schlechtere Ergebnisse als für die Trägerfrequenz $f_{T_g} = 100 \text{ MHz}$. Hier tritt der Umstand der Dämpfung der Signalamplitude der einzelnen Kanäle des AD9959-Boards (Abschnitt 8.2) auf Grund des 200 MHz Tiefpassausgangsfilters deutlicher hervor als bei den durchgeführten Distanzunterschiedsmessungen (Abschnitt 10.2.1). Insbesondere die Messungen für die Musterfaktoren $k = [0.25, 0.50, 2.00]$ zeigen, dass hier der absolute Fehler δe überwiegend kleiner 10 mm für alle verwendeten Granularitäten p ist. Dies bekräftigt die Ergebnisse aus Abschnitt 10.2.1, dass der maximale Fehler für die verwendeten Trägerfrequenzen mit $\pm 1 \text{ cm}$ angesetzt werden kann.

10.2.3 Zusammenfassung der Messergebnisse

Die Ergebnisse der Distanzunterschiedsmessung (Abschnitt 10.2.1) und des Auflösungsvermögens (Abschnitt 10.2.2) zeigen, dass die LSB-Methode den Distanzunterschied mit einem Fehler von ± 1 cm bestimmt. Bei der Distanzunterschiedsmessung konnte für die Kombination aus Musterfaktor $k = 0.25$, Trägerfrequenz $f_{T_g} = 150$ MHz und Granularität $p = 1$ mm eine absolute Ungenauigkeit beziehungsweise ein maximaler Fehler $\delta e \leq 7.8$ mm erreicht werden. Der durch die Messungen ermittelte maximale Fehler der LSB-Methode entspricht damit in etwa 1° Phasenverschiebung in Bezug zur Trägerfrequenz.

Die Messwerte des Auflösungsvermögens bestätigten zum überwiegenden Teil die erhaltenen Ergebnisse der Distanzunterschiedsmessung in Bezug auf die absolute Ungenauigkeit. Sie zeigen aber auch, dass das Auflösungsvermögen kleiner 1° Phasenverschiebung in Bezug auf die verwendete Trägerfrequenz stark abnimmt und keine zuverlässigen Distanzunterschiede Δs mehr bestimmt werden können. Weiterhin verdeutlichen die Ergebnisse, dass der Musterfaktor k Einfluss auf das Auflösungsvermögen nimmt. Als abschließende Erkenntnis aus den Ergebnissen der Distanzunterschieds- und Auflösungsmessung ist ableitbar, dass bei Verwendung des eingesetzten Mustererkennungsverfahrens (Abschnitt 10.1) der maximale Fehler bei $\pm 1^\circ$ Phasenverschiebung in Bezug zu der verwendeten Trägerfrequenz angesetzt werden kann.

11 Berechnungsverfahren: Fourier-Analyse

Im letzten Kapitel wurde die Mustererkennung zur Berechnung des Distanzunterschieds beschrieben. Die Mustererkennung gehört zu den symbolverarbeitenden Verfahren, die anhand vorgegebener Muster diskrete Strukturen oder Teilmengen einer diskreten Struktur identifizieren. Dabei wird die Hüllkurve des Interferenzsignals mit einem Satz an Referenzmustern verglichen. Das Referenzmuster mit der größten Ähnlichkeit benennt dann den Distanzunterschied. Der Distanzunterschied lässt sich aber auch aus der Hüllkurve des Interferenzsignals berechnen. Dazu wird die Hüllkurve einer Fourier-Analyse unterzogen und ihr Phasenspektrum aufgestellt. Aus den ermittelten Phasen des Spektrums berechnet sich anschließend der Distanzunterschied. Im Abschnitt 11.1 werden zunächst einige wenige ausgesuchte Grundlagen der Fourier-Transformation wiederholt, ehe im Abschnitt 11.2 die eigentliche Herleitung des Berechnungsverfahrens beschrieben wird. Im Abschnitt 11.3 werden dann die aufgenommenen Messwerte aus Kapitel 10 wiederverwendet und mit dem hergeleiteten Berechnungsverfahren Fourier-Analyse bewertet.

11.1 Grundlagen der Fourier-Transformation

Für ein besseres Verständnis der Herleitung des Berechnungsverfahrens Fourier-Analyse in den folgenden Abschnitten werden die Fourier-Reihe und die Fourier-Transformation angesprochen. Auch wenn der Begriff *Fourier-Analyse* oft synonym für die Zerlegung einer in einem endlichen Intervall periodischen Funktion in eine Reihe von Fourier-Koeffizienten, der Fourier-Reihe, verwendet wird, steht der Begriff der *Fourier-Analyse* in Bezug zur LSB-Methode für das Berechnungsverfahren zur Bestimmung des Distanzunterschieds Δs aus der Hüllkurve des Interferenzsignals.

11.1.1 Der Dirac-Impuls

Eine wichtige Größe in der Theorie linearer Systeme ist der Dirac-Impuls [9], auch als Dirac-Stoß oder Delta-Funktion bezeichnet. Der Dirac-Impuls $\delta(t - t_0)$ ist im mathematischen Sin-

ne keine Funktion, sondern eine Distribution [9]. Er ist ein Rechteckimpuls, der unendlich hoch und unendlich dünn ist, aber immer die Fläche 1 hat (Gleichung (11.1)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad \text{mit} \quad \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & : t = t_0 \\ 0 & : t \neq t_0 \end{cases} . \quad (11.1)$$

Eine wichtige Eigenschaft des Dirac-Impulses ist dessen *Ausblendeigenschaft*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt = x(t_0) . \quad (11.2)$$

Gleichung (11.2) besagt, dass nur an der Stelle t_0 der Funktionswert $x(t_0)$ bestehen bleibt und alle anderen Funktionswerte von $x(t)$ Null werden. Die Wirkung des Dirac-Impuls beziehungsweise der Delta-Funktion $\delta(t)$ ist aber nur durch den *Integranden unter dem Integral* in Gleichung (11.2) zu erklären. Dies kann vereinfacht so gedeutet werden, als würde die Delta-Funktion aus dem Verlauf der Funktion $x(t)$ den Funktionswert $x(t_0)$ an der Stelle t_0 *abtasten* und so dem Integral diesen Wert $x(t_0)$ zuordnen. Der Dirac-Impuls wird somit durch sein *Gewicht* – dem Flächeninhalt – charakterisiert. Der Ausdruck:

$$x(t) = A \cdot \delta(t - t_0) \quad (11.3)$$

beschreibt einen Dirac-Impuls, der das *Gewicht* A hat und dessen Flächeninhalt genau diesen Wert A annimmt. Bedeutung erlangt der Dirac-Impuls bei der Beschreibung von Frequenzspektren mit diskreten Spektralanteilen einer Fourier-Transformierten Funktion $x(t)$. Durch den Dirac-Impuls werden genau die diskreten Frequenzen benannt, die in der Funktion $x(t)$ enthalten sind. Bildlich wird der Dirac-Impuls durch einen Pfeil dargestellt, an dem neben dem Pfeil dessen Gewicht notiert wird.

11.1.2 Fourier-Reihe

Die Zerlegung einer periodischen Funktion in eine Reihe von Fourier-Koeffizienten wird als Entwicklung der Fourier-Reihe bezeichnet. Die Entwicklung der Fourier-Reihe zerlegt ein periodisches Signal $y(t)$ mit der Periode T_0 in eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen. Die entstehende Summe (Gleichung (11.4)) mit der Grundfrequenz $f_0 = 1/T_0$ wird als Fourier-Reihe bezeichnet:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)] . \quad (11.4)$$

Die Koeffizienten a_n und b_n sind dabei durch die Integrale:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11.5)$$

und (11.6)

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.7)$$

gegeben. Da die Interferenzen der Sinus- und Kosinusschwingungen aus Gleichung (11.4) auch als phasenverschobene Kosinusschwingungen darstellbar sind, sind die Glieder von $y(t)$ auch mittels der Phasen φ_n und der Amplituden A_n beschreibbar [9]:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t - \varphi_n) \quad . \quad (11.8)$$

Dabei ist:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (11.9)$$

und

$$\varphi_n = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) & \text{wenn } a_n \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) + \pi & \text{wenn } a_n < 0 \end{cases} \quad . \quad (11.10)$$

Amplitude A_n und Phase φ_n werden im Amplituden- und Phasenspektrum graphisch über der Frequenz $n f_0$ aufgetragen.

Die Fourier-Reihe in Gleichung (11.4) ist über die Exponentialschreibweise der Sinus- und Kosinus-Terme auch in einer Exponentialform mit den Koeffizienten α_n darstellbar [9]:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad \text{mit } j = \sqrt{-1} \quad \text{und} \quad (11.11)$$

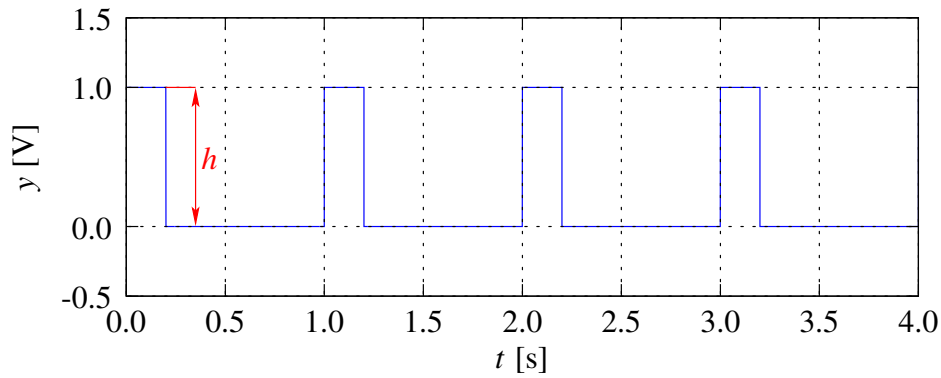
$$\alpha_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{oder} \quad (11.12)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad . \quad (11.13)$$

Beispiel

Die Entwicklung der Fourier-Reihe des Rechteckimpulses $y(t)$ mit der Amplitude h (Abbildung 11.1):

$$y(t) = \begin{cases} h & : 0 \leq 2\pi f_0 t < 2\pi g \\ 0 & : 2\pi g \leq 2\pi f_0 t < 2\pi \end{cases} \quad \text{mit } 0 \leq g \leq 1 \quad (11.14)$$

Abbildung 11.1: Rechteckimpuls $y(t)$.

führt mit dem Tastgrad $g = 0.2$ (gemäß DIN IEC 60469-1):

$$g = \frac{\tau}{T} = \frac{\text{Impulsdauer}}{\text{Periodendauer}} \quad (11.15)$$

und $\omega_0 = 2\pi f_0$ zur Fourier-Reihe $y(t)$:

$$y(t) = \frac{2h}{\pi} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(\varphi)}{1} \cos(\omega_0 t) + \frac{\sin(2\varphi)}{2} \cos(2\omega_0 t) + \frac{\sin(3\varphi)}{3} \cos(3\omega_0 t) + \right. \\ \left. \frac{\sin(4\varphi)}{4} \cos(4\omega_0 t) + \frac{\sin(5\varphi)}{5} \cos(5\omega_0 t) + \dots \right), \quad (11.16)$$

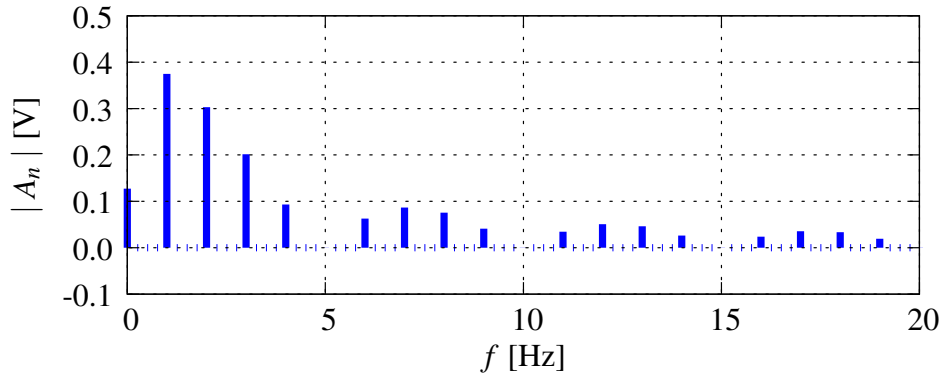
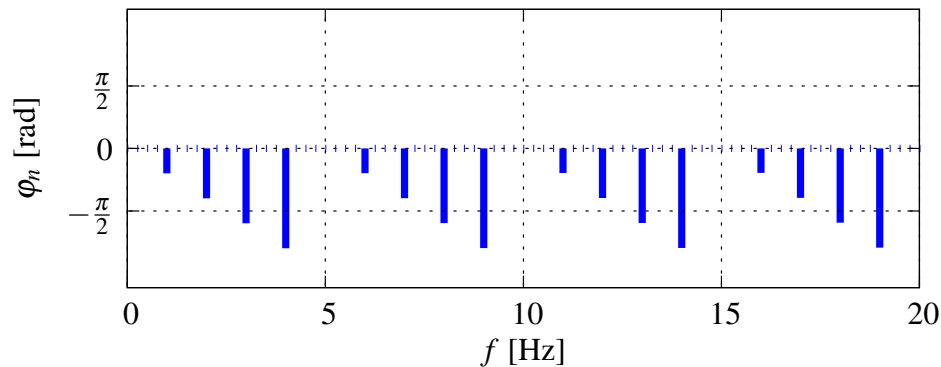
wobei sich die Größe φ aus dem frequenzunabhängigen ($f = 0$) Anteil $2h\varphi/2\pi$ der Fourier-Reihe $y(t)$ und dem arithmetischen Mittelwert $h \cdot g$ des Rechteckimpulses $y(t)$ berechnet:

$$\frac{2h}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{2} = h \cdot g \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi \cdot g = \pi \cdot \frac{\tau}{T_0} \quad (11.17)$$

Der arithmetische Mittelwert des Rechteckimpulses $y(t)$ entspricht dem Amplituden-Spitze-Spitze-Wert h multipliziert mit dem Tastgrad g . Zu beachten ist, dass mit dem Tastgrad $g = 0.2$ jede 5. Harmonische ($\sin(n5\varphi) \Rightarrow \sin(n\pi) = 0$ mit $n > 0, n \in \mathbb{N}$) in Gleichung (11.16) verschwindet. Das Amplituden- und Phasenspektrum des Rechteckimpulses $y(t)$ sind in den Abbildungen 11.2 und 11.3 dargestellt. Die Entwicklung der Fourier-Reihe eines periodischen Signals mit der Periode T_0 liefert somit dessen diskretes Amplituden- und Phasenspektrum.

11.1.3 Fourier-Transformation

Ist das Signal ein aperiodisches Signal, wird nicht die Fourier-Reihe entwickelt, sondern die Fourier-Transformation angewendet. Die Fourier-Transformation ist eine Integraltransformation (Gleichung (11.18)) und transformiert das Signal $y(t)$ aus dem Zeitbereich in den

Abbildung 11.2: Amplitudenspektrum $|A_n|$ der Fourier-Reihe $y(t)$.Abbildung 11.3: Phasenspektrum φ_n der Fourier-Reihe $y(t)$.

Frequenzbereich $Y(f)$. Es wird auch davon gesprochen, dass die Funktion $y(t)$ durch die Transformation auf die Funktion $Y(f)$ abgebildet wird:

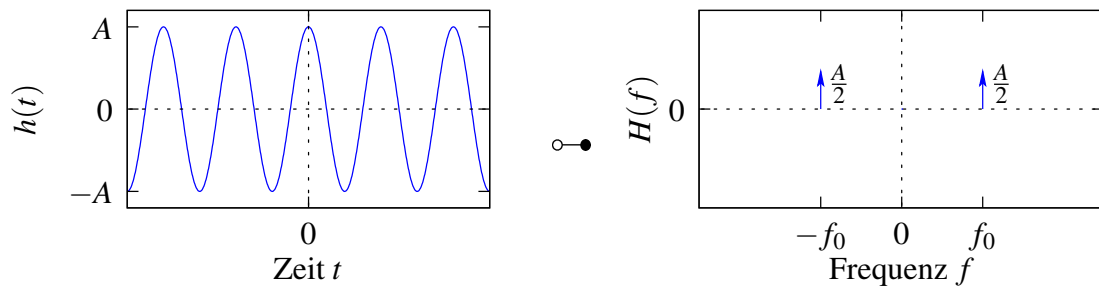
$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad . \quad (11.18)$$

Die Fourier-Transformation liefert nun im Gegensatz zur Fourier-Reihe ein kontinuierliches Amplituden- und Phasenspektrum.

Eine wichtige Beziehung zwischen der Fourier-Reihe und der Fourier-Transformierten ist, dass eine Fourier-Reihe in seine Fourier-Transformierte überführbar [17] ist:

$$x_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad \longleftrightarrow \quad X_P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(f - n f_0) \quad . \quad (11.19)$$

Die Beziehung rührt daher, dass die komplexe Exponentialfunktion $e^{j2\pi n f_0 t}$ einen Dirac-Impuls $\delta(f - n f_0)$ als Fourier-Transformierte hat. $X_P(f)$ aus Gleichung (11.19) ist ein Linienspektrum, das aus Dirac-Impulsen besteht, deren *Gewichte* – Integral des Dirac-Impulses – gleich den komplexen Fourier-Koeffizienten α_n sind. Die Fourier-Transformierte der Fourier-Reihe besitzt aber weiterhin das diskrete Amplituden- und Phasenspektrum der Fourier-

Abbildung 11.4: Funktion $h(t)$ und ihre Fourier-Transformierte $H(f)$.

Reihe. Die diskreten Frequenzanteile der Fourier-Reihe werden jetzt durch den Dirac-Impuls symbolisiert und nehmen dabei den Flächeninhalt des jeweiligen Koeffizienten α_n an.

Beispiel

Die Fourier-Transformation der periodischen Funktion:

$$h(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (11.20)$$

führt (ohne weiteren Beweis) zu der Fourier-Transformierten:

$$H(f) = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0) \quad (11.21)$$

Gleichung (11.21) besagt, dass an den Frequenzpunkten f_0 und $-f_0$ jeweils ein Spektralanteil mit dem Gewicht $A/2$ entsteht (Abbildung 11.4).

11.1.4 Zeitverschiebung und Faltung

Zur Bestimmung des Phasenspektrums der Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ (Gleichung (5.14)) werden die Eigenschaften der Fourier-Transformation *Verschiebung im Zeitbereich* und *Faltung im Frequenzbereich* angewendet [9].

$$h(t - t_0) \circ \bullet H(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad \text{Zeitverschiebung} \quad (11.22)$$

$$h(t) \cdot x(t) \circ \bullet H(f) * X(f) \quad \text{Faltung im Frequenzbereich} \quad (11.23)$$

Die Faltung, symbolisiert durch den Faltungsoperator $*$, ist für zwei periodische Funktionen $x(t)$ und $h(t)$ definiert durch das Faltungsintegral:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) \quad (11.24)$$

Vereinfacht ist die Faltung als eine Wichtung jedes Wertes von $x(t)$ durch jeden Wert von $h(t)$ zu verstehen, wodurch eine neue Funktion $y(t)$ entsteht. Auf eine tiefergehende Betrachtung wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet und auf die einschlägige Literatur zu diesem Thema verwiesen [17, 9]. Für die Herleitung der Fourier-Transformierten der Hüllkurve wurde das in der Signaltheorie benannte Faltungstheorem: „Eine Multiplikation im Zeitbereich entspricht einer Faltung im Frequenzbereich“ (Gleichung (11.23)) verwendet [17]. Der einfachste Typ einer Faltung ist die Faltung zweier Dirac-Impulse [9]. Es entsteht ein verschobener Dirac-Impuls:

$$\delta_1(t - t_1) * \delta_2(t - t_2) = \delta[t - (t_1 + t_2)] \quad . \quad (11.25)$$

11.2 Verfahren

Über die Fourier-Analyse der Hüllkurve des Interferenzsignals $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ (Gleichung (5.14)):

$$\tilde{r}_{\Delta t}(t) = |2 \cdot \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t)| \quad (\text{Wdh. Gl. (5.14)})$$

wird die Phasenverschiebung $\varphi_s = 2\pi f_{T_g} \Delta t$ mit $\Delta t = \Delta s / c$ des Schwebungsanteils:

$$\cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t) = \cos(2\pi f_s t - \varphi_s)$$

mit der Schwebungsfrequenz f_s und dem Distanzunterschied Δs aus dem Phasenspektrum berechnet. Nachfolgend werden noch einmal kurz die einzelnen Parameter der Funktion der Hüllkurve (Gleichung (5.14)) genannt:

f_s : Schwebungsfrequenz,	c : Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s,
f_{T_g} : Globale Trägerfrequenz,	f_m : Modulationsfrequenz $f_m = f_s / k$,
k : Musterfaktor,	Δs : Distanzunterschied $\Delta s = \Delta t \cdot c$.

11.2.1 Fourier-Transformation der Hüllkurve

Nach dem kurzen Exkurs zur Fourier-Transformation und zur Fourier-Reihe wird nun in diesem Abschnitt die Fourier-Transformierte der Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ (Gleichung (5.14)) hergeleitet. Die Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ ist eine reelle Funktion und lässt sich somit wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{\Delta t}(t) &= |2 \cdot \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t)| \quad (\text{Wdh. Gl. (5.14)}) \\ &= 2 \cdot \left| \cos(2\pi f_m t) \right| \cdot \left| \cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t) \right| \quad . \end{aligned} \quad (11.26)$$

Mit der folgenden Substitution der Produktterme von Gleichung (11.26):

$$h(t) = \left| \cos(2\pi f_s t - 2\pi f_{T_g} \Delta t) \right| = \left| \cos(2\pi f_s t - \varphi) \right| \quad \text{und} \quad (11.27)$$

$$g(t) = \left| \cos(2\pi f_m t) \right| \quad (11.28)$$

wird die Hüllkurven-Funktion $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ nun wie folgt definiert:

$$\tilde{r}_{\Delta t}(t) = A \cdot g(t) \cdot h(t) \quad . \quad (11.29)$$

Für die Herleitung der Fourier-Transformierten der Hüllkurven-Funktion $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ mit der Vereinfachung der Amplitude $A = 1$:

$$\tilde{r}_{\Delta t}(t) = A \cdot g(t) \cdot h(t) \quad \Rightarrow \quad r(t) = h(t) \cdot g(t) \quad (11.30)$$

werden die Fourier-Transformierten von $h(t)$ und $g(t)$ (Gleichung (11.31)) benötigt. Dabei wird die Zeitverschiebung von $h(t)$ durch φ unter Zuhilfenahme von Gleichung (11.22) berücksichtigt und die Multiplikation der Funktionen in eine Faltung (Gleichung (11.23)) überführt.

$$r(t) = h(t) \cdot g(t) \quad \circ \bullet \quad R(f) = H(f) * G(f) \quad (11.31)$$

Für die beiden Transformationen von $h(t)$ und $g(t)$ nach $H(f)$ und $G(f)$ wird jeweils die Fourier-Transformierte des *Gleichgerichteten Kosinus* $u(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$ benötigt. Mit der Darstellung einer periodischen Funktion der Periode T_0 als Exponentialform der Fourier-Reihe [9] (Gleichung (11.32)):

$$u_F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad (11.32)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.33)$$

werden zuerst der gleichgerichtete Kosinus $u(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$ über die Fourier-Reihe $u_F(t)$ in die Fourier-Transformierte $U(f)$ überführt und anschließend mit dem erhaltenen Ergebnis die beiden Fourier-Transformierten $H(f)$ und $G(f)$ gebildet.

Transformation von $u(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$

Für $u(t)$ gilt: $u(t) = u(-t)$. Damit ist $u(t)$ eine gerade Funktion und die Koeffizienten α_n der komplexen Fourier-Reihe $u_F(t)$ sind reell. Weiterhin wird zur Vereinfachung der Integration

von $u(t)$ die Betragsbildung aufgelöst: $u(t) = |\cos(2\pi f_0 t)| \Rightarrow u^*(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, indem die Integrationsgrenzen von $[-T_0/2, T_0/2]$ auf $[-T_0/4, T_0/4]$ bei gleichzeitiger Verdopplung des Integrationsergebnisses substituiert werden. Damit ist für α_n zur Herleitung der Fourier-Reihe $u_F(t)$ von $u(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$ folgendes Integral zu lösen:

$$\alpha_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} u^*(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.34)$$

$$= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.35)$$

Herleitung der Fourier-Reihe $u_F(t)$

$$u_F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad (11.36)$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \cos(2\pi f_0 t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.37)$$

Mit der eulerschen Form für $\cos(2\pi f_0 t)$ berechnet sich α_n wie folgt:

$$\alpha_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (11.38)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \left[e^{j2\pi f_0 t(1-n)} + e^{-j2\pi f_0 t(1+n)} \right] dt \quad (11.39)$$

$$= \frac{1}{T_0} \cdot \frac{1}{j2\pi f_0} \left[\frac{e^{j2\pi f_0 t(1-n)}}{1-n} - \frac{e^{-j2\pi f_0 t(1+n)}}{1+n} \right] \Big|_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \quad (11.40)$$

$$= \frac{1}{j2\pi} \left[\frac{e^{j2\pi f_0 t(1-n)}}{1-n} - \frac{e^{-j2\pi f_0 t(1+n)}}{1+n} \right] \Big|_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \quad (11.41)$$

$$= \frac{1}{j2\pi} \left[\frac{e^{j\frac{\pi}{2}(1-n)}}{1-n} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}(1+n)}}{1+n} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}(1-n)}}{1-n} + \frac{e^{j\frac{\pi}{2}(1+n)}}{1+n} \right] \quad (11.42)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{1-n} \left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}(1-n)} - e^{-j\frac{\pi}{2}(1-n)}}{2j} \right) + \frac{1}{1+n} \left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}(1+n)} - e^{-j\frac{\pi}{2}(1+n)}}{2j} \right) \right] \quad (11.43)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{1-n} \sin\left(\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{1+n} \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (11.44)$$

und mit der folgenden Substitution:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos(x) \quad (11.45)$$

und der Summe:

$$\frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n} = \frac{2}{1-n^2} \quad (11.46)$$

ergibt sich für α_n :

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi(1-n^2)} \cdot \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \quad . \quad (11.47)$$

Abschließend wird der Ausdruck $\cos(n\pi/2)$ für alle n ($n \in \mathbb{N}$) berechnet:

$$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^p & \text{für alle geraden } n \text{ mit } n = 2p \\ 0 & \text{für alle ungeraden } n \text{ mit } n = 2p+1 \end{cases} \quad . \quad (11.48)$$

Der Koeffizient α_n wird nun mit dem Ergebnis aus Gleichung (11.48) zu α_p überführt:

$$\alpha_n \rightarrow \alpha_p = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^p}{1-4p^2} \quad \text{mit } p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.49)$$

und die Fourier-Reihe $u_F(t)$ des gleichgerichteten Kosinus $u(t)$ aufgestellt:

$$u_F(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^p}{1-4p^2} \cdot e^{j2\pi 2pf_0 t} \quad . \quad (11.50)$$

Mit der Eigenschaft (Gleichung (11.19)), dass jede Fourier-Reihe eines periodischen Signals $x_P(t)$ in eine Fourier-Transformierte $X_P(f)$ umgeformt werden kann [17]:

$$x_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad \circ \bullet \quad X_P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(f - n f_0) \quad , \quad (\text{Wdh. Gl. (11.19)})$$

wird die Fourier-Transformierte $U(f)$ der Fourier-Reihe $u_F(t)$ aufgestellt:

$$u_F(t) \circ \bullet U(f) \quad (11.51)$$

$$U(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^p}{1-4p^2} \cdot \delta(f - 2pf_0) \quad . \quad (11.52)$$

Gleichung (11.52) beschreibt nun die Fourier-Transformierte des gleichgerichteten Kosinus $u(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$. Das Frequenzspektrum (Abbildung 11.5) von $U(f)$ setzt sich somit aus einer Impuls-Folge von Dirac-Impulsen $\delta(f - 2pf_0)$ der Frequenzen $2pf_0$ zusammen.

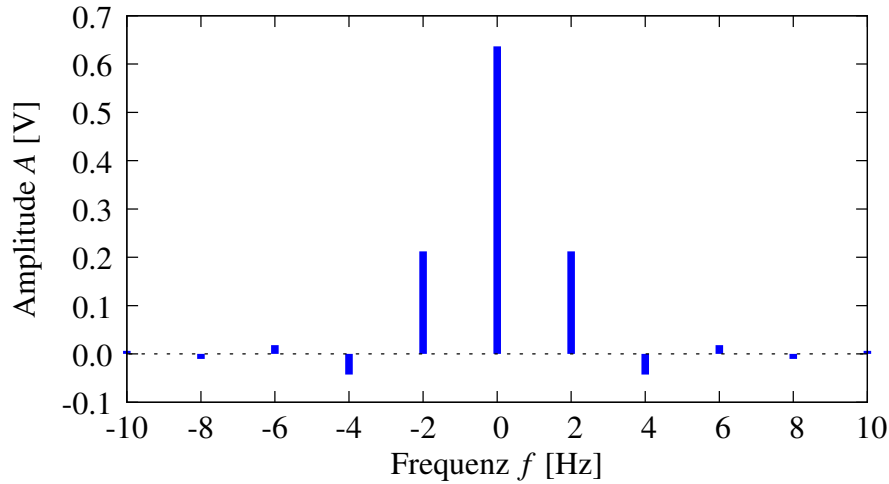


Abbildung 11.5: Amplitudenspektrum des gleichgerichteten Kosinus $u(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$ für $f_0 = 1$ Hz mit der charakteristischen Folge von Dirac-Impulsen.

Herleitung von $H(f)$ und $G(f)$

Mit Gleichung (11.22): $h(t - t_0) \circ \bullet H(f)e^{-j2\pi f t_0}$ für die Zeitverschiebung und dem erhaltenen Ergebnis aus Gleichung (11.52) wird nun $h(t)$ (Gleichung (11.27)) transformiert:

$$h(t) \circ \bullet H(f) \Rightarrow H(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^p}{1-4p^2} \cdot \delta(f-2pf_s) e^{-j2p\varphi_s} \quad (11.53)$$

Für $g(t)$ (Gleichung (11.28)) ergibt sich mit Gleichung (11.52) die Transformierte $G(f)$:

$$g(t) \circ \bullet G(f) \Rightarrow G(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^q}{1-4q^2} \cdot \delta(f-2qf_m) \quad (11.54)$$

Herleitung von $R(f)$

Für die Bestimmung der Fourier-Transformierten $R(f)$, sind nun abschließend die beiden Transformierten $H(f)$ und $G(f)$ noch zu falten (Gleichung (11.31)).

$$r(t) = h(t) \cdot g(t) \circ \bullet R(f) = H(f) * G(f) \quad (\text{Wdh. Gl. (11.31)})$$

Das Ergebnis der Faltung (Gleichung (11.55)) liefert ein Produkt zweier unendlicher Reihen.

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^p}{1-4p^2} \cdot \frac{(-1)^q}{1-4q^2} \cdot \delta(f-2pf_s) \cdot \delta(f-2qf_m) \cdot e^{-j2p\varphi_s} \\ &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{p+q}}{(1-4p^2)(1-4q^2)} \cdot \delta(f-(2pf_s+2qf_m)) \cdot e^{-j2p\varphi_s} \end{aligned} \quad (11.55)$$

Gleichung (11.55) liefert nun zu jedem Spektralanteil $\delta(f - (2pf_s + 2qf_m))$ die dazugehörige Phase $\phi = 2p\phi_s$. Auf Grund der doppelten Summenbildung über die beiden Indizes p und q entstehen o.B.d.A. für verschiedene Kombinationen aus p und q Spektralanteile der selben Frequenz, aber mit unterschiedlichen Phasen. Die Mehrdeutigkeit der Phase zu einem Spektralanteil und die doppelte Summenbildung aus Gleichung (11.55) lässt sich durch eine der Fourier-Transformation vorgelagerte Multiplikation (Abschnitt 11.2.2) der Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ mit einem Rechtecksignal der Amplitude 1 umgehen.

Vereinfachung der doppelten Summenbildung

Die Umgehung der doppelten Summenbildung und somit die Mehrdeutigkeit der Phase zu einem Spektralanteil kann durch die Aufhebung der Gleichrichtung von $g(t) = |\cos(2\pi f_m t)|$ umgangen werden. Damit reduziert sich die Transformation auf die Faltung von $H(f)$ mit der Transformierten des Kosinus $\cos(2\pi f_0 t)$ (Gleichung (11.56)), der nur aus den beiden Spektralanteilen $\delta(f - f_0)$ und $\delta(f + f_0)$ besteht.

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \quad \circ \bullet \quad X(f) = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0) \quad (11.56)$$

Die Reduzierung besteht darin, dass nicht mehr die beiden Reihen $H(f)$ und $G(f)$ gefaltet werden müssen, sondern nur noch die Reihe $H(f)$ mit den beiden Spektrallinien der Kosinus-Transformierten $X(f)$ mit $f_0 = f_m$ (Gleichung (11.56)). Mit Gleichung (11.25) verschiebt sich dadurch jede Spektrallinie von $H(f)$ jeweils nach links und rechts um den Betrag der Modulationsfrequenz $\delta(f - (2pf_s \pm f_m))$. Für die Fourier-Transformierte $R(f)$ ergibt sich daraus das folgende vereinfachte Ergebnis $\tilde{R}(f)$:

$$\tilde{R}(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^p}{1 - 4p^2} \cdot [\delta(f - (2pf_s - f_m)) + \delta(f - (2pf_s + f_m))] e^{-j2p\phi} . \quad (11.57)$$

11.2.2 Rückgewinnung der Phase

Die Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ wird vor der Transformation mit der Rechteckfunktion $w(t)$ im Zeitbereich multipliziert:

$$w(t) = \text{sign}(\cos(2\pi f_m t)) = \begin{cases} 1 & \cos(2\pi f_m t) > 0 \\ 0 & \cos(2\pi f_m t) = 0 \\ -1 & \cos(2\pi f_m t) < 0 \end{cases} . \quad (11.58)$$

Die Rechteckfunktion $w(t)$ wechselt mit der Modulationsfrequenz f_m zwischen ± 1 und muss phasensynchron zu $g(t)$ sein. In Abbildung 11.6 sind $w(t)$ sowie die Multiplikation (obere Zeile) zwischen der Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ (linke Spalte) und der angepassten Hüllkurve $z(t)$ (rech-

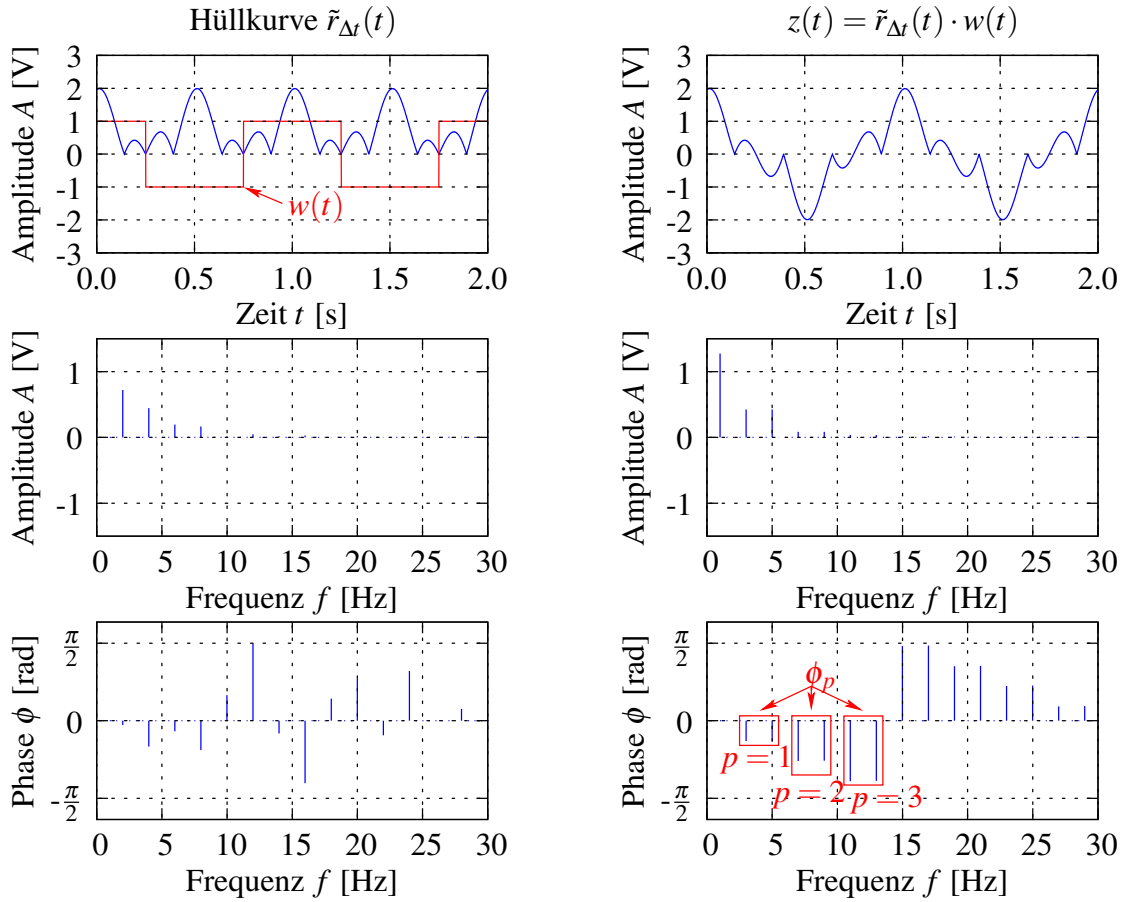


Abbildung 11.6: Linke Spalte mit Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ und rechte Spalte mit $z(t)$ mit jeweils ihren Amplitudenspektren (Mitte) und Phasenspektren (unten) sowie der Rechteckfunktion $w(t)$ (oben links, rotes Rechteck-Signal).

te Spalte) dargestellt. Die Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ ändert sich damit wie folgt:

$$z(t) = \tilde{r}_{\Delta t}(t) \cdot \text{sign}(\cos(2\pi f_m t)) \quad (11.59)$$

$$= 2 \cdot h(t) \cdot g(t) \cdot \text{sign}(\cos(2\pi f_m t)) \quad (11.60)$$

$$= 2 \cdot |\cos(2\pi f_s t - \phi_s)| \cdot |\cos(2\pi f_m t)| \cdot \text{sign}(\cos(2\pi f_m t)) \quad (11.61)$$

$$= 2 \cdot |\cos(2\pi f_s t - \phi_s)| \cdot \cos(2\pi f_m t) \quad (11.62)$$

Für die Transformierte $Z(f)$ von $z(t)$ ergibt sich analog zu $\tilde{R}(f)$ (Gleichung (11.57)):

$$Z(f) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^p}{1-4p^2} \cdot [\delta(f - (2pf_s - f_m)) + \delta(f - (2pf_s + f_m))] e^{-j2p\phi_s} \quad (11.63)$$

Für das Phasenspektrum von $Z(f)$ leitet sich aus Gleichung (11.63) folgende Beziehung ab:

$$\phi_p(f) = 2p\phi_s [\delta(f - (2pf_s - f_m)) + \delta(f - (2pf_s + f_m))] \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.64)$$

Das Phasenspektrum (Gleichung (11.64)) besagt, dass bei geraden und ganzzahligen Vielfachen $2p$ der Schwebungsfrequenz f_s , positiv und negativ verschoben um die Modulationsfrequenz f_m , gerade und ganzzahlige Vielfache $2p$ des Phasenwinkels φ_s auftreten. Abbildung 11.6 zeigt in der oberen Zeile der linken Spalte die Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ mit den Parametern $f_s = 4 \text{ Hz}$, $f_m = 2 \text{ Hz}$, $f_{T_g} = 100 \text{ MHz}$ und $\Delta s = 15 \text{ cm}$ (entspricht $\varphi_s = 0.314^\circ$) sowie die Rechteckfunktion $w(t)$. Das Ergebnis der Multiplikation ist in der oberen Zeile der rechten Spalte dargestellt. In der mittleren Zeile sind das Amplitudenspektrum und in der unteren Zeile das Phasenspektrum für $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ (linke Spalte) und $z(t)$ (rechte Spalte) abgebildet. Insbesondere für das Phasenspektrum von $z(t)$ sind deutlich die $\phi_p = 2p\varphi_s$ Phasen für die Frequenzen $2pf_s - f_m$ und $2pf_s + f_m$ mit $p = 1$ und $p = 2$ erkennbar. Mit Gleichung (11.64) berechnen sich nun die Phasenverschiebung φ_s und daraus der Distanzunterschied Δs :

$$\Delta s = \frac{\varphi_s \cdot c}{2\pi f_{T_g}} = \frac{\phi_p}{2p} \cdot \frac{c}{2\pi f_{T_g}} \quad \text{mit} \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad .$$

Die Phase ϕ_p entsteht als Ergebnis des berechneten Phasenspektrums mit Hilfe der *Fast-Fourier-Transformation* der am Interferenzpunkt aufgenommenen Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$.

11.2.3 Einschränkungen zum Berechnungsverfahren

Aufgrund des Zusammenhangs von Schwebungsfrequenz f_s und Modulationsfrequenz f_m über den Musterfaktor k mit $f_m = f_s/k$, kommt es insbesondere bei Musterfaktoren $k < 1$ zu einer Überlagerung von Spektrallinien verschiedener Phasen am selben Frequenzpunkt, wenn die Modulationsfrequenz f_m ein ganzzahliges Vielfaches der Schwebungsfrequenz f_s ist:

$$f_m = \frac{f_s}{k} = n \cdot f_s \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1, k < 1 \quad . \quad (11.65)$$

Zum Beispiel für den Fall $f_m = f_s/0.5 = 2f_s$ ergibt sich für die Spektrallinien nach Gleichung (11.64) mit den Indizes $p-1$ und $p+1$ folgende Überlagerung:

$$\delta(f - (2(p-1)f_s + 2f_s)) = \delta(f - (2(p+1)f_s - 2f_s)) \quad (11.66)$$

$$\delta(f - 2pf_s) = \delta(f - 2pf_s) \quad . \quad (11.67)$$

Für den Frequenzpunkt $\delta(f - 2pf_s)$ kann nicht entschieden werden, ob der Phasenwert der Spektrallinie $\phi_{p-1} = 2(p-1)\varphi_s$ oder $\phi_{p+1} = 2(p+1)\varphi_s$ zugeordnet werden muss.

11.2.4 Berechnungsablauf

Die Berechnung des Distanzunterschieds Δs aus dem Interferenzsignal $r_{\Delta t}(t)$ erfolgt nach folgendem Ablauf:

1. Aus dem Interferenzsignal wird dessen Hüllkurve bestimmt und aus dieser eine *verlängerte* Musterperiode T_M extrahiert. Der Signalabschnitt der Musterperiode wird jeweils am Anfang und am Ende um beispielsweise $1/4$ einer Musterperiode verlängert:

$$T_{\text{Abschnitt}} = \frac{1}{4}T_M + T_M + \frac{1}{4}T_M \quad .$$

2. Im zweiten Schritt ist die Phasensynchronität zwischen den beiden Funktionen $w(t)$ und $g(t)$ nach Gleichung (11.61) zu bestimmen.

$$\begin{aligned} z(t) &= 2 \cdot h(t) \cdot g(t) \cdot w(t) \\ &= 2 \cdot |\cos(2\pi f_s t - \varphi_s)| \cdot |\cos(2\pi f_m t)| \cdot \text{sign}(\cos(2\pi f_m t)) \quad . \end{aligned}$$

Dazu wird in einem iterativen Prozess die Rechteckfunktion $w(t)$ mit dem Signalabschnitt $T_{\text{Abschnitt}}$ multipliziert und vom Ergebnis das Phasenspektrum aufgestellt. Die Funktionen $g(t)$ und $w(t)$ sind phasensynchron, wenn der Spektralanteil der Frequenz f_m im Phasenspektrum Null ist. Ist dieser Spektralanteil nicht Null, wird $w(t)$ entlang des originalen Signalabschnitts verschoben und wieder mit diesem multipliziert. Der Vorgang: verschieben, multiplizieren und berechnen des Phasenspektrums wird solange wiederholt, bis $w(t)$ und $g(t)$ phasensynchron sind.

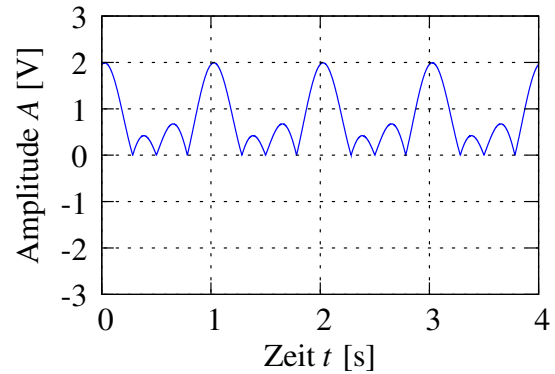
3. Im dritten und abschließenden Schritt werden ein oder mehrere Phasenpaare $p = 1, 2, 3, \dots$ laut Gleichung (11.64) aus dem letzten berechneten Phasenspektrum ausgewählt und damit der Distanzunterschied Δs berechnet:

$$\phi_p(f) = 2p\varphi_s [\delta(f - (2pf_s - f_m)) + \delta(f - (2pf_s + f_m))] \quad .$$

Auf Grund des Charakters verschiedener Einflussfaktoren (Abschnitt 11.3.2) variieren die erhaltenen Einzelwerte eines Phasenpaares. Durch Mittelwertbildung kann auf eine mittlere Phasenverschiebung approximiert und daraus der Distanzunterschied Δs berechnet werden. Die Phase ϕ_{f_m} des Spektralanteils der Frequenz f_m ist im Realen nur schwer mit Null zu bestimmen. Daher wird mit dem iterativen Prozess das absolute Minimum der Phase ϕ_{f_m} gesucht. Der Vorgang des iterativen Prozesses ist in dem folgenden Beispiel näher erklärt. Wird die Suche der Verschiebung $w(t - \tau)$ in der Umgebung des Anfangs ($t_{\text{Start}} \approx 1/4 T_M$) der eigentlichen Musterperiode T_M im Signalabschnitt $T_{\text{Abschnitt}}$ durchgeführt, muss nicht zwingend der gesamte Signalabschnitt $T_{\text{Abschnitt}}$ durchsucht werden. In der Nähe des Startpunkts t_{Start} befindet sich ein absolutes Minimum der Phase ϕ_{f_m} .

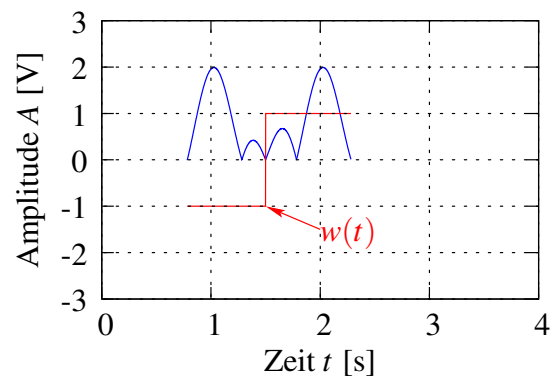
Beispiel zum iterativen Suchprozess für $\phi_{f_m} \approx 0$ *Hüllkurve*

Hüllkurve $\tilde{r}_{\Delta t}(t)$ des Interferenzsignals $r_{\Delta t}(t)$.

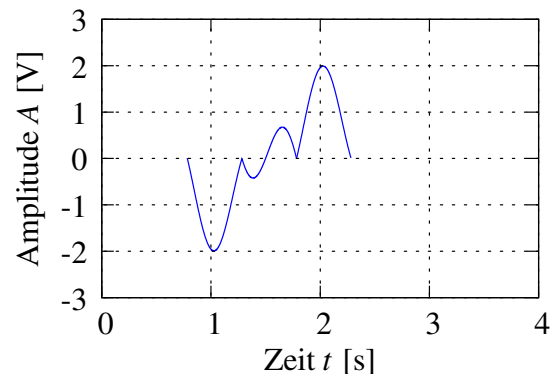
*Signalabschnitt extrahieren*

Extrahierter Signalabschnitt, bestehend aus einer Musterperiode T_M und den Verlängerungen $1/4 T_M$:

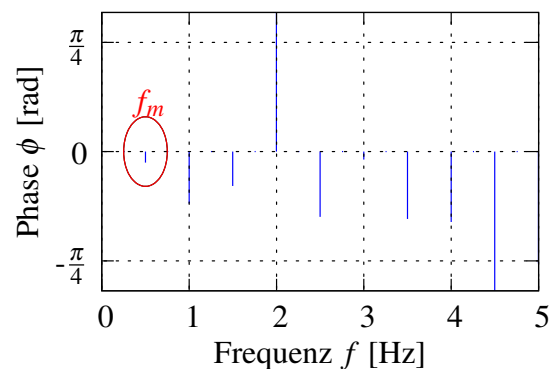
$$T_{\text{Abschnitt}} = \frac{1}{4}T_M + T_M + \frac{1}{4}T_M \quad .$$

*Multiplikation*

Multiplikation von $T_{\text{Abschnitt}}$ mit der Rechteckfunktion $w(t)$.

*Berechnung des Phasenspektrums*

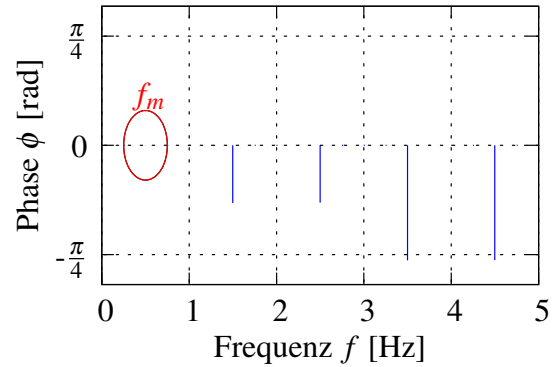
Im vorliegenden Fall ist die Phase der Rechteckfunktion $w(t)$ nicht angepasst: $\phi_{f_m} \neq 0$. $w(t)$ wird entlang des Signalabschnitts $T_{\text{Abschnitt}}$ verschoben.



Berechnung des Phasenspektrums

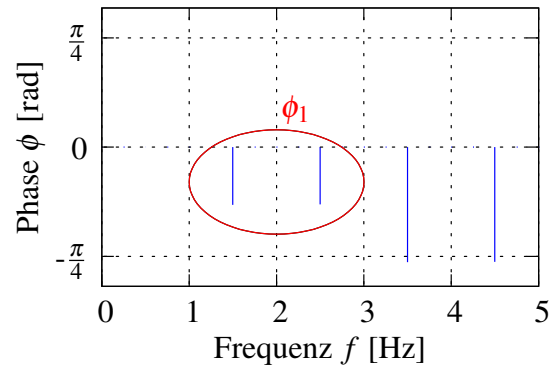
Im vorliegenden Fall ist die Phase der Rechteckfunktion $w(t)$ angepasst:

$$\phi_{f_m} = 0.$$

*Distanzunterschied*

Berechnung des Distanzunterschieds Δs über das Phasenpaar ϕ_1 mit $p=1$:

$$\Delta s = \frac{\phi_1 \cdot c}{4\pi f_{T_g}} \quad \text{mit } c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$



Die Phase ϕ_1 berechnet sich als Mittelwert (Abschnitt 11.3.1) aus den beiden Spektralanteilen $+f_m$ und $-f_m$ nach Gleichung (11.64):

$$\phi_1(f) = 2\phi_s[\delta(f - (2f_s - f_m)) + \delta(f - (2f_s + f_m))] \quad \text{mit } p=1. \quad (\text{Wdh. Gl. (11.64)})$$

11.3 Messungen

Für die Überprüfung des beschriebenen Berechnungsverfahrens Fourier-Analyse wurden keine neuen Messwerte aufgenommen. Es wurde auf dieselben Messwerte wie bei der Mustererkennung (Abschnitt 10.2) zurückgegriffen. Durch die Verwendung derselben Messwerte für beide Berechnungsverfahren, Mustererkennung und Fourier-Analyse, sind die Ergebnisse beider Verfahren qualitativ vergleichbar.

Analog zur Mustererkennung (Abschnitt 10.2) wird der eingestellte Distanzunterschied als *erwarteter* Distanzunterschied Δs_E und der aus den Messergebnissen bestimmte Distanzunterschied als *ermittelter* Distanzunterschied Δs_M bezeichnet. Im Abschnitt 11.3.1 werden die gemessenen Distanzunterschiede Δs_E aus Abschnitt 10.2.1 zur Bestimmung des Distanzunterschieds Δs_M verwendet. Unter der Berücksichtigung der beschriebenen Einschränkungen (Abschnitt 11.2.3) des Berechnungsverfahrens Fourier-Analyse erfolgte nur für die Musterfaktoren $k=2.00$ und $k=4.00$ eine Auswertung der Messwerte.

11.3.1 Distanzunterschied

Analog zur Mustererkennung (Abschnitt 10.2.1) berechnete sich der Distanzunterschied wieder als Mittelwert $\overline{\Delta s_M}$ aus den drei bestimmten Distanzunterschieden Δs_{M_i} zu jedem eingestellten Distanzunterschied Δs_E im Bereich $-15 \text{ cm} \leq \Delta s_E \leq 15 \text{ cm}$ mit der Distanzunterschiedsänderung $\delta s = 1 \text{ cm}$. Unter der Berücksichtigung der Einschränkungen des Berechnungsverfahrens (Abschnitt 11.2.3) wurden nur die Messkurven mit den Musterfaktoren $k=2.00$ und $k=4.00$ und den Trägerfrequenzen $f_{T_g} = [50, 100, 150] \text{ MHz}$ zur Auswertung verwendet. Die Phase zu einem einzelnen Distanzunterschied Δs_{M_i} wurde ebenfalls als Mittelwert (Gleichung (11.68)) der beiden Spektrallinien ($f_s \pm f_m$) aus Gleichung (11.64) eines ausgewählten Spektralanteils der Schwebungsfrequenz $2pf_s$ ermittelt.

$$\begin{aligned}\phi_p &= 2p\varphi_s [\delta(f - (2pf_s - f_m)) + \delta(f - (2pf_s + f_m))] && \text{(Wdh. Gl. (11.64))} \\ \phi_{p_1} &= 2p\varphi_s \cdot \delta(f - (2pf_s - f_m)) && \text{Spektralanteil: } -f_m \\ \phi_{p_2} &= 2p\varphi_s \cdot \delta(f - (2pf_s + f_m)) && \text{Spektralanteil: } +f_m \\ \phi_p &= \frac{\phi_{p_1} + \phi_{p_2}}{2} && (11.68)\end{aligned}$$

Der Theorie nach besitzen beide Spektrallinien ($\pm f_m$) die gleiche Phase. Die Auswertung eines reell abgetasteten Signals liefert für beide Spektrallinien aber zwei gering unterschiedliche Phasen. Zur Bestimmung eines Phasenwertes wurde somit der Mittelwert aus den beiden Phasenwerten gebildet und dieser anschließend zur Berechnung des Distanzunterschieds Δs_{M_i} verwendet. Die Ergebnisse der Auswertung der Messkurven für die Musterfaktoren $k=2.00$ und $k=4.00$ sind in den Tabellen A.4 ($+\delta s$: Distanzunterschiedsänderung in Richtung Signalquelle $b_1(t)$) und A.5 ($-\delta s$: Distanzunterschiedsänderung in Richtung Signalquelle $b_2(t)$) aufgeführt. Tabelle 11.1 fasst die absolute Ungenauigkeit δe (Gleichung (10.4)) aus den Tabellen A.4 und A.5 für alle Distanzunterschiede Δs_E eines Paares aus Musterfaktor k und Trägerfrequenz f_{T_g} zusammen. Die angegebene absolute Unsicherheit δe stellt wie

Tabelle 11.1: Die absolute Ungenauigkeit δe der Fourier-Analyse für positive $+\delta s$ und negative $-\delta s$ Distanzunterschiedsänderung über alle eingestellten Distanzunterschiede Δs_E .

k	$f_{T_g} [\text{MHz}]$	$\delta e [\text{mm}]$	
		$+\delta s$	$-\delta s$
2.00	50	8	12
	100	6	7
	150	4	6
4.00	50	14	20
	100	12	15
	150	9	12

beim Mustererkennungsverfahren (Abschnitt 10.2.1) den Betrag der größten Abweichung zwischen dem erwarteten Distanzunterschied Δs_E und den ermittelten Distanzunterschieden Δs_{M_i} aus den drei Einzelwerten dar.

$$\delta e = |\Delta s_E - \Delta s_{M_i}| \quad \text{Mit } i \text{ für den Einzelwert } \Delta s_{M_i} \text{ mit der größten Abweichung zum Erwartungswert } \Delta s_E. \quad (\text{Wdh. Gl. (10.4)})$$

In den Abbildungen 11.7 bis 11.9 sind die einzelnen Messergebnisse $\overline{\Delta s_M}$ jeweils mit ihren positiven und negativen Abweichungen aufgetragen. Die bestimmten Distanzunterschiede $\overline{\Delta s_M}$ sind für einen besseren Vergleich untereinander punktweise auf 1 normiert ($\Delta s_M / \Delta s_E$). Je deutlicher ein normierter Messwert sich der Normierungslinie 1 annähert, desto genauer wurde der entsprechende Distanzunterschied $\overline{\Delta s_M}$ bestimmt. Des Weiteren zeigen die Fehlerbalken die Streuung der Werte Δs_{M_i} zur Mittelwertbildung des Messwertes $\overline{\Delta s_M}$ an. Die Fehlerbalken sind nicht normiert und geben die tatsächliche positive und negative Abweichung zum bestimmten Distanzunterschied $\overline{\Delta s_M}$ wieder. Je größer der Fehlerbalken vom Mittelwert $\overline{\Delta s_M}$ abweicht, desto größer ist die Streuung. Ist der Fehlerbalken klein und der normierte Messwert $\overline{\Delta s_M} \approx 1$, lieferten alle Messungen Δs_{M_i} zum selben Distanzunterschied Δs_E annähernd die gleichen Ergebnisse und der bestimmte Distanzunterschied $\overline{\Delta s_M}$ entspricht dem erwarteten Distanzunterschied $\overline{\Delta s_E}$. Die Höhe der Ungenauigkeit am Distanzunterschied $\Delta s_E = 0$ cm gegenüber den anderen Distanzunterschieden (insbesondere $\Delta s_E \geq |\pm 5 \text{ cm}|$) liegt im Verhältnis vom erwarteten Distanzunterschied Δs_E zum bestimmten Distanzunterschied Δs_M begründet. Hier ist der Einfluss des maximalen Fehlers größer als bei den Verhältnissen der Distanzunterschiede $\Delta s_E \geq |\pm 5 \text{ cm}|$. In Summe der erhaltenen Ergebnisse ist auch für das Berechnungsverfahren Fourier-Analyse, analog zum Berechnungsverfahren Mustererkennung (Abschnitt 10.2.1), ein maximaler Fehler von ± 1 cm für die in den durchgeführten Messungen verwendeten Parameter feststellbar.

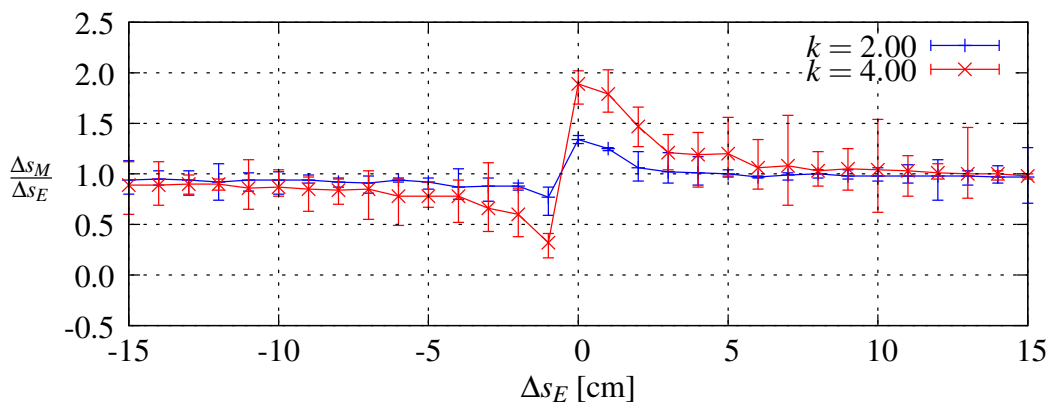
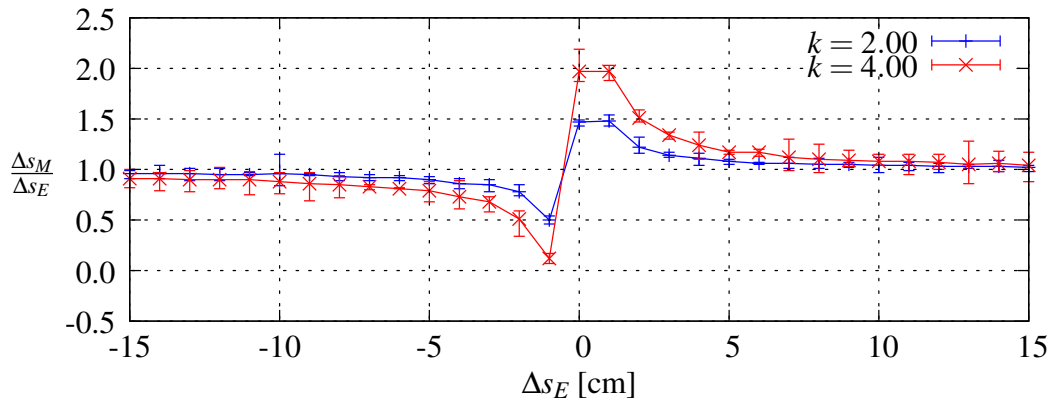
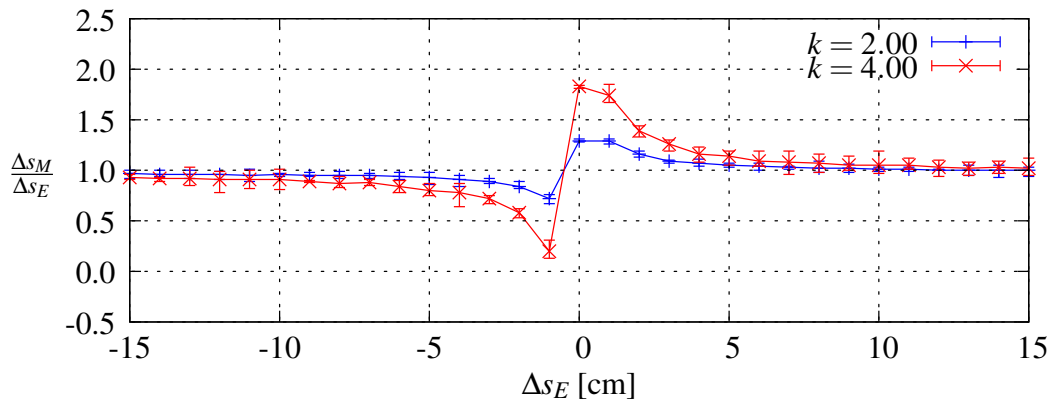


Abbildung 11.7: Normierte Messergebnisse für $f_{T_g} = 50 \text{ MHz}$.

Abbildung 11.8: Normierte Messergebnisse für $f_{T_g} = 100$ MHz.Abbildung 11.9: Normierte Messergebnisse für $f_{T_g} = 150$ MHz.

11.3.2 Auflösungsvermögen

Eine Granularität (Abschnitt 10.1.2) wie beim Mustererkennungsverfahren besteht für die Fourier-Analyse nicht, da die Phase direkt aus dem Signal berechnet wird. Die Genauigkeit der ermittelten Phase hängt aber stark von der Genauigkeit der Phasenlage der Rechteckfunktion $w(t)$ (Gleichung (11.58)) zur Hüllkurve ab. Je kleiner die Restphase der Spektrallinie der Modulationsfrequenz f_m ist (Abschnitt 11.2.4), desto gleichwertiger sind die beiden Spektrallinien ($f_s \pm f_m$) eines Spektralanteils der Schwebungsfrequenz $2pf_s$ und so genauer ist die eigentliche Phasenbestimmung. Dies führt wiederum zu einer kleineren absoluten Ungenauigkeit δe . Abbildung 11.10 zeigt die Auswirkung einer nicht angepassten Phasenlage. In der linken Spalte sind die Hüllkurve und darunter das Phasenspektrum mit passender Phasenlage abgebildet. Beide Spektrallinien eines Spektralanteils weisen denselben Phasenwert auf. In der rechten Spalte ist im oberen Diagramm ebenfalls die Hüllkurve abgebildet. Das darunter liegende Diagramm zeigt das Phasenspektrum bei nicht angepasster Phasenlage. Hier ist die Rechteckfunktion $w(t)$ um 2.5 % an Abtastpunkten, in Bezug zur Gesamtabtastpunktzahl der Hüllkurve, verschoben. Im Rückschluss geht daraus hervor, dass die Genauigkeit

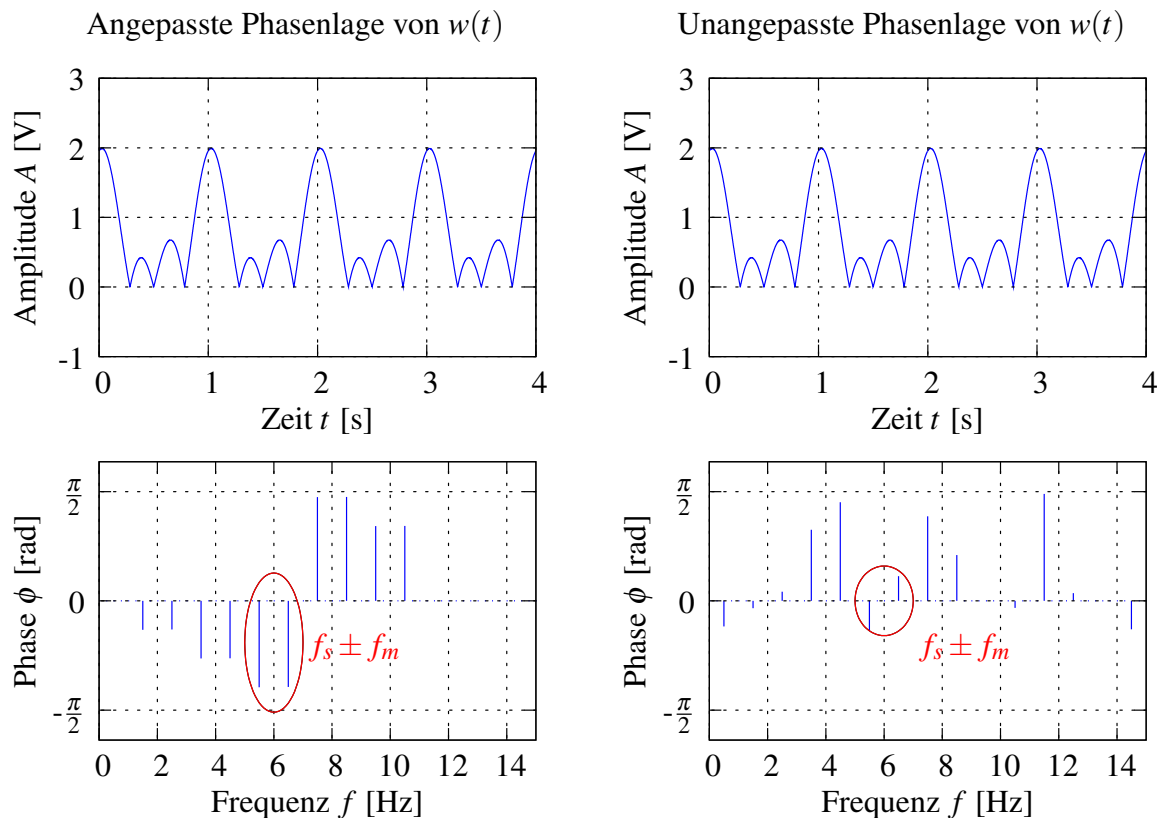


Abbildung 11.10: Unterschiedliche Phasen ϕ der Spektrallinien eines Spektralanteils $f_s \pm f_m$ durch nicht angepasste Phasenlage der Rechteckfunktion $w(t)$.

der Phase von der Abtastfrequenz proportional abhängt. Denn je höher die Abtastung, desto präziser ist die Phasenlage der Rechteckfunktion $w(t)$ einstellbar.

Abbildung 11.11 zeigt in der linken Spalte ebenfalls die Hüllkurve mit Phasenspektrum wie in Abbildung 11.10. Im oberen Diagramm der rechten Spalte ist die Hüllkurve mit gaußschem Rauschen von bis zu $\pm 25\%$ gestört. Im unteren Diagramm ist das Phasenspektrum der verrauschten Hüllkurven aufgetragen. Insbesondere am dritten Spektralanteil (von links) ist eine Differenz der Phasenwerte zwischen den beiden Spektrallinien deutlich zu erkennen. Somit hat neben der Phasenlage auch der Rauschanteil einen Einfluss auf die Genauigkeit der Phase. Ein gewisser Fehler entsteht auch durch das Quantisierungsrauschen während der Abtastung der analogen Hüllkurve des Interferenzsignals $r_{\Delta t}(t)$.

11.3.3 Zusammenfassung der Messergebnisse

Die beiden Tabellen A.4 und A.5 zeigen für die Musterfaktoren $k=2.00$ und $k=4.00$ die aufgenommenen Messwerte mit den weiteren Parametern: Trägerfrequenz $f_{T_g} = [50, 100, 150]$ MHz und Schwebungsfrequenz $f_s = 2.98$ Hz. Zu jedem Distanzunterschied Δs_E wurden ebenfalls, wie bei der Mustererkennung (Abschnitt 10) die 3 aufgenommenen Messkurven

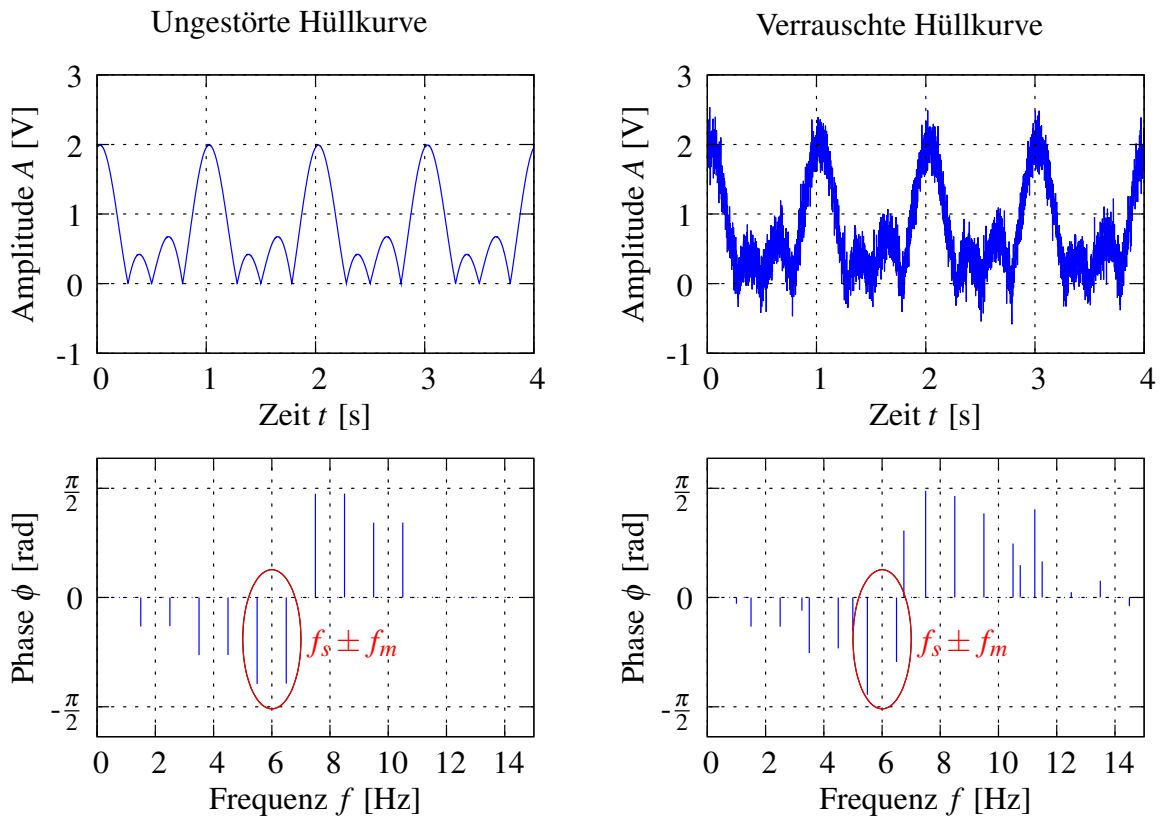


Abbildung 11.11: Unterschiedliche Phasen ϕ_s eines Spektrallinienpaares $f_s \pm f_m$ durch verrauschte Hüllkurve.

zur Ergebnisbildung des Distanzunterschieds Δs_M als Mittelwert zu einem Endergebnis zusammengefasst. Für den Musterfaktor $k = 2.00$ wurde der Distanzunterschied Δs_M mit einem maximalen Fehler von 8 mm ermittelt. Für den Musterfaktor $k = 4.00$ beträgt der maximale Fehler 14 mm. Zusammenfassend ist ableitbar, dass das Berechnungsverfahren Fourier-Analyse einen maximalen Fehler von $\pm 1^\circ$ Phasenverschiebung in Bezug zu der verwendeten Trägerfrequenz aufweist.

12 Weitere Untersuchungen zur LSB-Methode

In den Kapiteln zur LSB-Methode (Kapitel 5), den Experimentalergebnissen (Kapitel 9), der Mustererkennung (Kapitel 10) und der Fourier-Analyse (Kapitel 11) ist die LSB-Methode umfangreich beschrieben, ihr Funktionsprinzip in mehreren Experimenten nachgewiesen und zwei verschiedene Berechnungsverfahren zur Bestimmung des Distanzunterschieds hergeleitet worden. Alle Betrachtungen, Herleitungen und Experimente wurden mit den Bedingungen von Störungsfreiheit und gleichen Signalamplituden $A_1/A_2 = 1$ durchgeführt. Die Einflüsse beziehungsweise die Auswirkungen beider Faktoren werden nun näher betrachtet. Zuerst wird der Einfluss der Amplitudendiskrepanz $D=A_1/A_2$ und anschließend der Einfluss von Rauschen auf die Ergebnisse der beiden Berechnungsverfahren Mustererkennung und Fourier-Analyse untersucht.

12.1 Simulations- und Fehlermodell

Beide Simulationen zur Amplitudendiskrepanz und zum Rauschen wurden in ähnlicher Weise durchgeführt. Verschiedene Amplitudendiskrepanzen und verschieden starkes Rauschen wurden auf unterschiedliche Distanzunterschiede Δs_i angewendet. Aus den sich ergebenden Signalen wurde mit der Mustererkennung und der Fourier-Analyse der jeweilige Distanzunterschied $\Delta s'_i$ bestimmt. Dadurch wurden zu einer Amplitudendiskrepanz oder einem Rauschen mehrere Distanzunterschiede $\Delta s'_i$, getrennt nach den Berechnungsverfahren, erhalten. Um zu einer Amplitudendiskrepanz oder einem Rauschen eine Aussage zu der Genauigkeit und der Zuverlässigkeit der Bestimmung des Distanzunterschieds $\Delta s'_i$ zu treffen, werden in den folgenden Abschnitten die drei Größen:

- normierter Mittelwert $\bar{\epsilon}$ der Abweichungen \hat{s}_i der *ermittelten* Distanzunterschiede $\Delta s'_i$ von den *eingestellten* Distanzunterschieden Δs_i ,
- die größte positive Abweichung d^+ der Einzelmessungen vom Mittelwert und
- die größte negative Abweichung d^- der Einzelmessungen vom Mittelwert

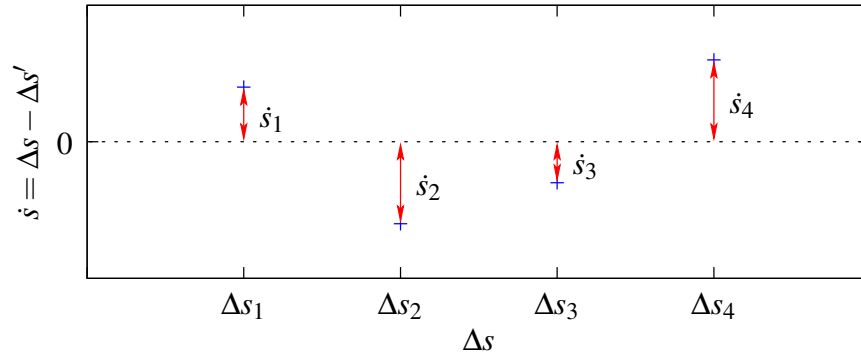


Abbildung 12.1: Abweichung \hat{s}_i des Messwertes $\Delta s'_i$ vom Erwartungswert Δs_i .

verwendet. Der normierte Mittelwert $\bar{\varepsilon}$ beschreibt den *Bestwert* der bestimmten Distanzunterschiede $\Delta s'_i$ zu einer Amplitudendiskrepanz oder einem Rauschen. Abbildung 12.1 zeigt den beschriebenen Zusammenhang zwischen den eingestellten Distanzunterschieden Δs_i , den bestimmten Distanzunterschieden $\Delta s'_i$ und den jeweiligen Einzelwertabweichungen \hat{s}_i :

$$\hat{s}_i = \Delta s_i - \Delta s'_i \quad . \quad (12.1)$$

Da die Absolutwerte für Δs_i und $\Delta s'_i$, mit Blick auf die Granularität der Mustererkennung, in Abhängigkeit verschiedener Trägerfrequenz stark voneinander abweichen, werden die Einzelwertabweichungen \hat{s}_i zur Wellenlänge λ der Trägerfrequenz f_{T_g} normiert und als die *normierten* Einzelwertabweichungen ε_i (Gleichung (12.2)) definiert:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta s_i - \Delta s'_i}{\lambda} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{c}{f_{T_g}} \neq 0 \quad . \quad (12.2)$$

Wird zum Beispiel von einer Granularität der Mustererkennung von 1° Auflösung zur Trägerfrequenz f_{T_g} ausgegangen, ergibt sich für eine Trägerfrequenz von $f_{T_g} = 1$ MHz eine Einzelwertabweichung von $\hat{s} = 83$ cm. Für eine Trägerfrequenz von $f_{T_g} = 1$ GHz ergibt sich eine wesentlich geringere Einzelwertabweichung von nur $\hat{s} = 0.83$ mm. Für eine allgemeingültige Aussage der Abweichungen \hat{s} wurde somit die normierte Einzelwertabweichung ε eingeführt. Die Simulationen lieferten somit zu einer Amplitudendiskrepanz und einem Rauschen einen Satz N von Abweichungen ε_i . Aus diesem Satz N (Anzahl der verwendeten Distanzunterschiede Δs) berechnet sich der normierte Mittelwert $\bar{\varepsilon}$:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \quad (12.3)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta s_i - \Delta s'_i}{c/f_{T_g}} \quad . \quad (12.4)$$

Das Vorzeichen des Mittelwerts $\bar{\varepsilon}$ gibt darüber Auskunft, ob die Bestimmung des Distanzunterschieds $\Delta s'$ im Mittel zu *kurz* oder zu *lang* war. Hierdurch kann eine Aussage über die Güte eines Berechnungsverfahrens getroffen werden, wobei festgestellt wird, ob die ermittelten Distanzunterschiede eher zu klein oder zu groß sind. Ist die Einzelwertabweichung $\varepsilon_i = 0$, entspricht der ermittelte Distanzunterschied $\Delta s'_i$ exakt dem eingestellten Distanzunterschied Δs_i . Der Mittelwert $\bar{\varepsilon}$ für sich gibt nur darüber Auskunft, welcher *Bestwert* sich aus dem Satz N von erhaltenen Distanzunterschieden $\Delta s'_i$ ableiten lässt. Er gibt keine Auskunft über die Zuverlässigkeit der Einzelwertabweichungen ε_i . Positive und negative Einzelwertabweichungen ε_i können sich gegenseitig derart aufheben, dass der Mittelwert $\bar{\varepsilon} = 0$ eintritt, die Einzelwertabweichungen ε_i selber aber einen nicht mehr vertretbaren Fehler aufweisen. In der Fehleranalyse wird daher zum Mittelwert oft die *Standardabweichung* und/oder *Varianz* [44] mit angegeben, um die Zuverlässigkeit der Einzelmessungen und somit des Mittelwertes zu bewerten. Für die Bewertung der Zuverlässigkeit der Einzelwertabweichungen ε_i wird aber in den folgenden Abschnitten bewusst auf die Größen Standardabweichung und Varianz verzichtet. Betrachtet wird ausschließlich die *Abweichung der Einzelwertabweichung* d_i (Gleichung (12.5)) vom Mittelwert $\bar{\varepsilon}$:

$$d_i = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon} \quad . \quad (12.5)$$

Die Standardabweichung ist die *mittlere quadratische Abweichung* der Messwerte vom Mittelwert. Sie gibt also die mittlere Unsicherheit eines Messwertes wieder. Der wahre Messwert kann aber eine wesentlich größere Abweichung aufweisen.

Abgeleitet aus dem einfachen Beispiel einer Einparkhilfe für Autos, wo jeder Millimeter Fehleinschätzung des Messwertes zu einer Kollision mit einem anderen Fahrzeug führen kann, wird ausschließlich die Abweichung der Einzelmessungen vom Mittelwert zur Bewertung der Simulationsergebnisse in den folgenden Abschnitten verwendet. Die Bewertung der Ergebnisse erfolgt somit ausschließlich durch die Auswertung des maximalen Fehlers. Da die Abweichung d_i positive und negative Ergebnisse liefert, werden zu einem Mittelwert immer beide Abweichungsrichtungen mit dem jeweils größten Abweichungswert berücksichtigt.

- d^+ : größte positive Abweichung der Einzelwertabweichung
- d^- : größte negative Abweichung der Einzelwertabweichung

Zusammenfassend ist zu beachten, dass die drei Größen Mittelwert $\bar{\varepsilon}$, größte positive Abweichung d^+ und größte negative Abweichung d^- immer zusammen betrachtet werden müssen, wenn die Simulationsergebnisse bewertet werden. Ein Mittelwert $\bar{\varepsilon} = 0$ besagt, dass im Mittel die Bestimmung des Distanzunterschieds $\Delta s'$ gleich dem eingestellten Distanzunterschied Δs ist. Mit den beiden Größen: größte positive d^+ und negative d^- Abweichung der

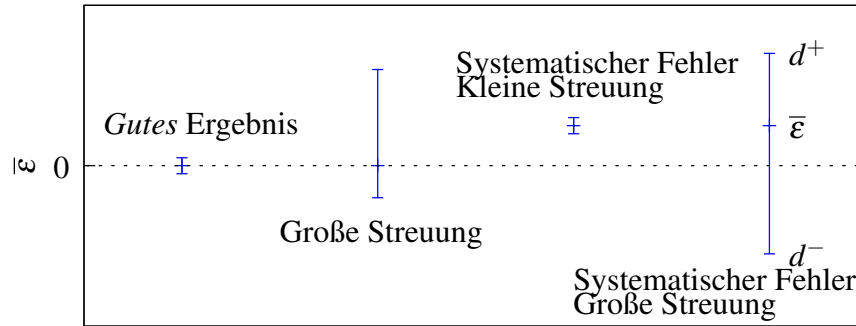


Abbildung 12.2: Beispiele des Zusammenhangs zwischen Mittelwert \bar{e} und den beiden Abweichungen der Einzelwertabweichungen d^+ und d^- .

Einzelwertabweichungen wird die Zuverlässigkeit des Mittelwerts charakterisiert. Sind zusätzlich zu $\bar{e} = 0$ die beiden Größen d^+ und d^- nahe oder gleich dem Mittelwert \bar{e} , wurden die Distanzunterschiede $\Delta s'$ mit einem sehr kleinen Fehler bestimmt. Ist $\bar{e} \neq 0$ bei kleinen d^+ und d^- wurde der Distanzunterschied $\Delta s'$ zwar mit einer geringen Streuung über alle Messwerte bestimmt, aber jede Bestimmung des Distanzunterschieds $\Delta s'$ weist einen systematischen Fehler auf. Hat mindestens eine der beiden Größen d^+ und d^- eine große Abweichung vom Mittelwert, besitzt mindestens eine Einzelmessung einen großen Fehler. Abbildung 12.2 veranschaulicht die Auswertung der Simulationsergebnisse anhand des Mittelwerts \bar{e} und der beiden Abweichungen der Einzelwertabweichung d^+ und d^- .

12.2 Amplitudendiskrepanz

In allen vorherigen Ausführungen wurde davon ausgegangen, dass die Amplituden A_i der Schwebungssignale $b_1(t)$ und $b_2(t)$ (Gleichung (5.1) und (5.2)) gleich $A_1 = A_2$ waren:

$$b_1(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_s t) \sin(2\pi f_{T_1} t) \quad , \quad (\text{Wdh. Gl. (5.1)})$$

$$b_2(t) = A_2 \cdot \cos(2\pi f_s t) \sin(2\pi f_{T_2} t) \quad . \quad (\text{Wdh. Gl. (5.2)})$$

Die Amplitudendiskrepanz untersucht jetzt die Auswirkungen der Ungleichheit $A_1 \neq A_2 \neq 0$ beider Amplituden auf die Auswertung des Interferenzsignals $r_{\Delta t}(t)$ (Gleichung (5.4)).

$$r_{\Delta t}(t) = b_1(t) + b_2(t) \quad . \quad (\text{Wdh. Gl. (5.4)})$$

Die Diskrepanz D – *das Missverhältnis* – wird als Verhältnis der Amplitude A_1 zur Amplitude A_2 wie folgt definiert:

$$D = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{mit} \quad A_1 \geq 0 \text{ und } A_2 > 0 \quad \text{und o.B.d.A. gilt } A_1 \leq A_2 \text{ mit } A_2 = 1 \quad . \quad (12.6)$$

In den durchgeführten Simulationen zur Amplitudendiskrepanz D wurde das Verhältnis der beiden Signalamplituden A_1 und A_2 im Bereich $0.1 \leq D \leq 1$ mit $A_2 = 1$ und A_1 im Intervall $0.1 \leq A_1 \leq 1$ mit der Schrittweite 0.1 variiert. Zu jeder Amplitudendiskrepanz D wurden verschiedene Distanzunterschiede Δs_i im Bereich $0 \leq \Delta s_i \leq c/(8 \cdot f_{T_g})$ mit der Schrittweite $\Delta\varphi = 0.6^\circ$ beziehungsweise $\delta s = c/(600 \cdot f_{T_g})$ simuliert und mittels der Mustererkennung und der Fourier-Analyse ausgewertet.

In Abhängigkeit der Amplitudendiskrepanz D ergibt sich nun für den allgemein formulierten normierten Mittelwert $\bar{\varepsilon}$ aus Gleichung (12.3) eine Funktion von D und diese wird als *Diskrepanzabweichung* $\varepsilon(D)$ definiert (Gleichung (12.7)).

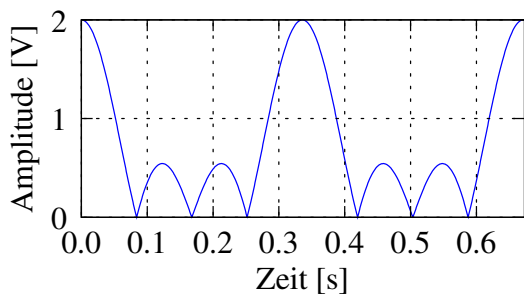
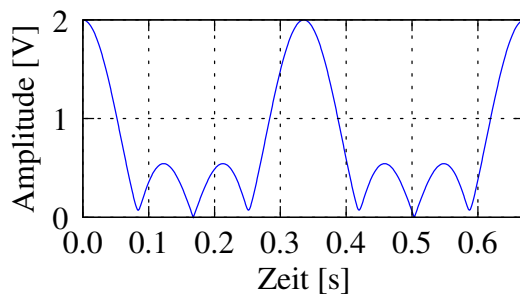
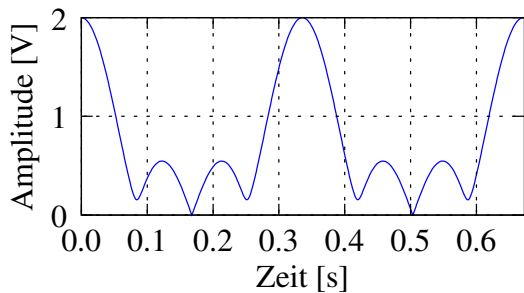
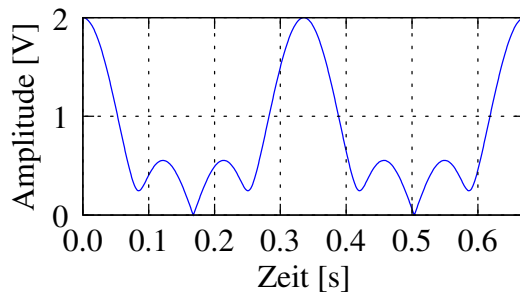
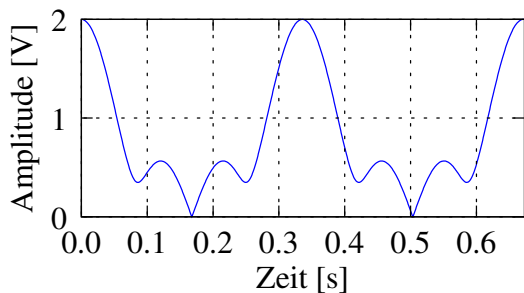
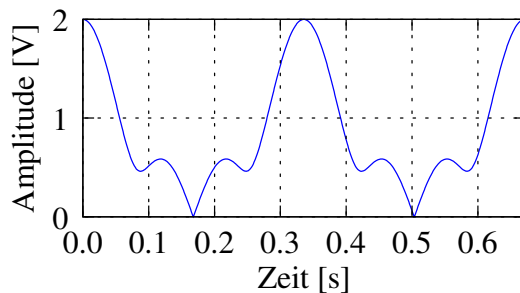
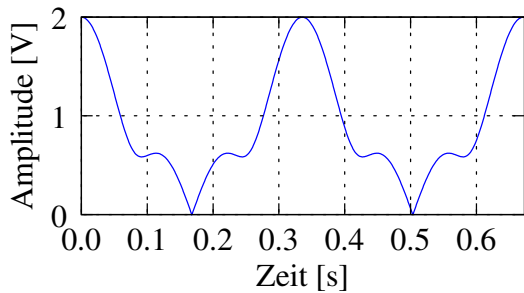
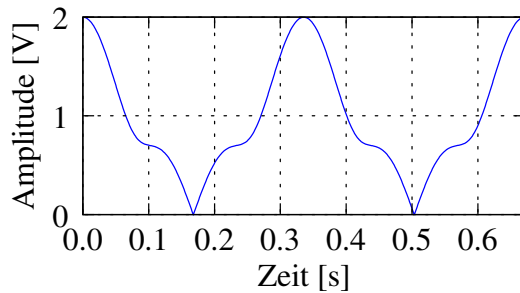
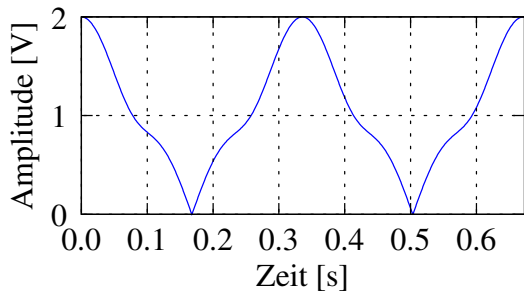
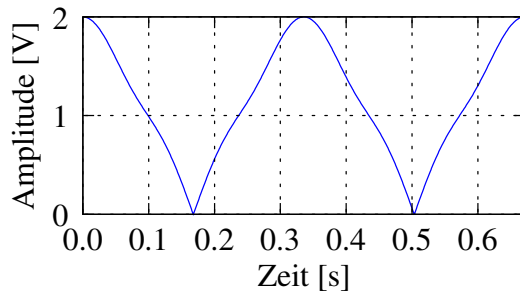
$$\varepsilon(D) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^D \quad (12.7)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta s_i - \Delta s'_i}{c/f_{T_g}} \quad (12.8)$$

ε_i^D aus Gleichung (12.7) beschreibt die normierte Einzelwertabweichung für alle durchgeführten Messungen der verschiedenen Distanzunterschiede Δs mit gleicher Amplitudendiskrepanz D .

12.2.1 Simulationssignale

In den Abbildungen 12.3 bis 12.10 sind verschiedene Amplitudendiskrepanzen D für den Musterfaktor $k=2.00$ und den Distanzunterschied $\Delta s=0$ dargestellt. Alle Hüllkurven sind auf einen Spitzenamplitudenwert von 2 V skaliert. Mit größer werdendem Unterschied der Amplituden A_1 und A_2 verkleinert sich die Amplitudendiskrepanz $D = A_1/A_2$ mit $A_2 = 1$ und $0 < A_1 \leq 1$ nach Gleichung (12.6) und ein Teil der charakteristischen Schwingungsbäuche *verschwindet* immer mehr, bis ab einer Amplitudendiskrepanz von $D \approx 0.1$ nur noch ein Schwebungssignal überwiegt.

Abbildung 12.3: $k = 2.00$ mit $D = 1.0$.Abbildung 12.4: $k = 2.00$ mit $D = 0.9$.Abbildung 12.5: $k = 2.00$ mit $D = 0.8$.Abbildung 12.6: $k = 2.00$ mit $D = 0.7$.Abbildung 12.7: $k = 2.00$ mit $D = 0.6$.Abbildung 12.8: $k = 2.00$ mit $D = 0.5$.Abbildung 12.9: $k = 2.00$ mit $D = 0.4$.Abbildung 12.10: $k = 2.00$ mit $D = 0.3$.Abbildung 12.11: $k = 2.00$ mit $D = 0.2$.Abbildung 12.12: $k = 2.00$ mit $D = 0.1$.

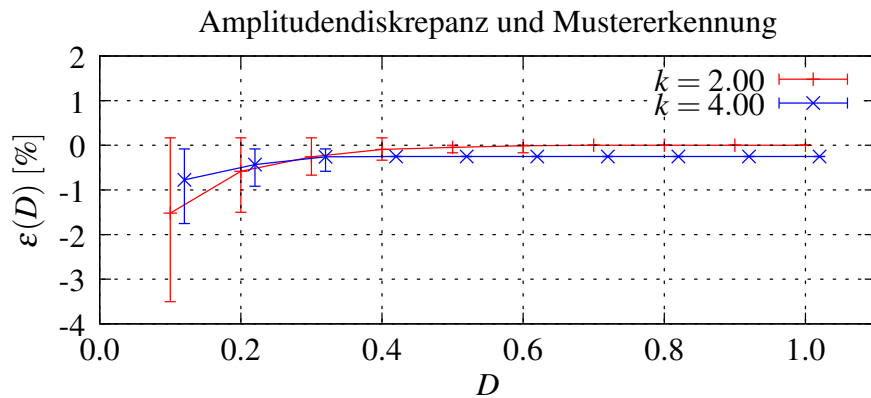


Abbildung 12.13: Amplitudendiskrepanz D für $k = [2.00, 4.00]$ bei der Mustererkennung. Für eine bessere Darstellung ist die Kurve $k = 4.00$ leicht nach rechts unten verschoben.

12.2.2 Mustererkennung

Die Abbildung 12.13 zeigt die Diskrepanzabweichung $\varepsilon(D)$ für die Musterfaktoren $k = 2.00$ und $k = 4.00$. Die Fehlerbalken stellen die größte positive d^+ und negative d^- Abweichung zu jeder Diskrepanz D dar. Beide Musterfaktoren zeigen, dass ab einer Amplitudendiskrepanz $D \geq 0.6$ eine sehr genaue Ermittlung des Distanzunterschieds Δs erreicht wird und der Einfluss unterschiedlicher Amplituden vernachlässigbar ist.

12.2.3 Fourier-Analyse

Die Abbildung 12.14 zeigt für die Musterfaktoren $k = 2.00$ und $k = 4.00$ die Diskrepanzabweichung $\varepsilon(D)$. Wie auch bei der Mustererkennung werden durch die Fehlerbalken die größte positive d^+ und negative d^- Abweichung dargestellt.

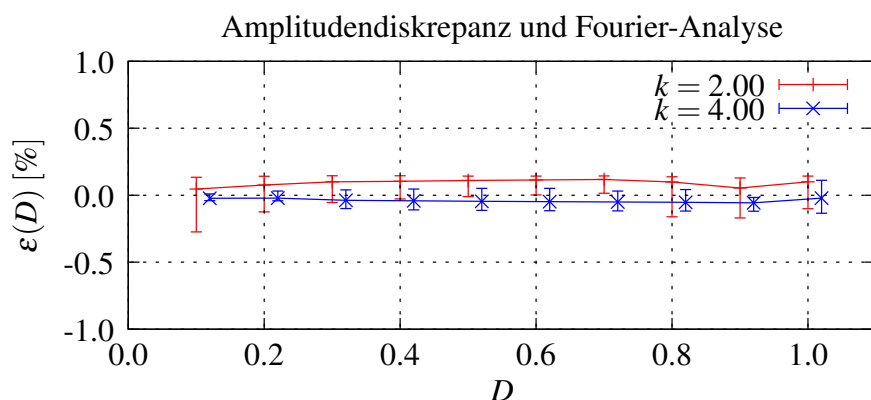


Abbildung 12.14: Amplitudendiskrepanz D für $k = [2.00, 4.00]$ bei der Fourier-Analyse. Für eine bessere Darstellung ist die Kurve $k = 4.00$ leicht nach rechts unten verschoben.

Im Gegensatz zu den Ergebnissen der Mustererkennung hat die Amplitudendiskrepanz D über den gesamten untersuchten Bereich keinen signifikanten Einfluss auf die Bestimmung des Distanzunterschieds Δs . Sowohl die Diskrepanzabweichung $\varepsilon(D)$ als auch die größte positive d^+ und negative d^- Abweichung sind über den gesamten Bereich annähernd Null und gleichbleibend. Erklären lässt sich das Ergebnis mit den Eigenschaften der Fourier-Analyse und ihrer Fähigkeit in einem Signal die enthaltenen Frequenzanteile zu erkennen. Trotz des Signalabstands von 20 dB bei einer Amplitudendiskrepanz von $D=0.1$ ergibt sich eine Diskrepanzabweichung $\varepsilon(D)$ wie bei der Amplitudendiskrepanz $D=1$.

12.2.4 Auswertung

Die Simulationen zur Amplitudendiskrepanz D zeigen, dass der Einfluss unterschiedlicher Amplituden auf das Ergebnis der Bestimmung des Distanzunterschieds Δs nicht gravierend ist. Die Amplitudendiskrepanz D wird hinreichend gut durch die beiden Berechnungsverfahren Mustererkennung und Fourier-Analyse kompensiert. Insbesondere die Fourier-Analyse liefert hier bessere Ergebnisse als die Mustererkennung. Sie kompensiert sogar eine Amplitudendiskrepanz von 1:10. Zudem scheint der Musterfaktor bei der Fourier-Analyse einen wesentlich geringeren beziehungsweise keinen Einfluss auf die Diskrepanzabweichung $\varepsilon(D)$ zu nehmen, als wie bei der Mustererkennung. Für die LSB-Methode bedeuten die Ergebnisse, dass sie eine ausreichende Störnempfindlichkeit gegenüber konstanten statischen Dämpfungen der Schwebungssignale besitzt.

12.3 Rauschen

Eine weitere Störgröße neben der Amplitudendiskrepanz ist die Störung der Schwebungssignale durch Rauschen. Das Interferenzsignal $r_{\Delta t}(t)$ entsteht durch Superposition der Schwebungssignale an einem Interferenzpunkt (Betrachtungspunkt der Superposition). Jedes Stör-signal wird demzufolge auch dem eigentlichen Interferenzsignal hinzu addiert. Die durchgeführten Simulationen untersuchten den Einfluss des Rauschens auf die Bestimmung des Distanzunterschieds Δs .

12.3.1 Rausch-Modell

Das zugrunde liegende Rauschmodell nutzte *weißes* Rauschen. Weißes Rauschen ist ein stochastisches Zufallssignal [17] und gekennzeichnet durch eine konstante spektrale Rauschleistungsdichte für alle Frequenzen des betrachteten Frequenzspektrums. Damit besitzen alle

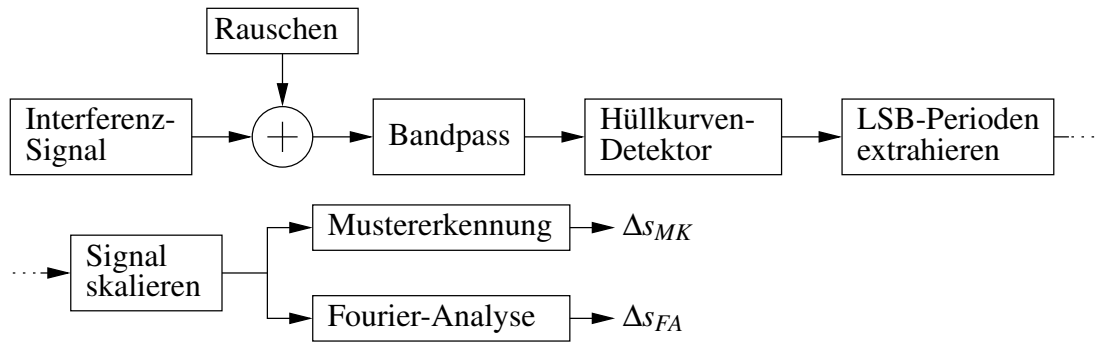


Abbildung 12.15: Berechnungsablauf der Simulation von Rauschstörungen.

Frequenzen des Frequenzspektrums die gleiche Leistung. Idealerweise ist das Frequenzspektrum unendlich.

Der Superposition der Schwebungssignale $b_1(t)$ und $b_2(t)$ (Gleichung (5.1) und (5.2)) wurde weißes Rauschen $s(t)$ mit unterschiedlichen Signal-Rausch-Verhältnissen (SRV), Abstand zwischen der Spitzenamplitude des *Nutzsignals* (Interferenzsignal) und des *Störsignals* (Rauschsignal), überlagert (Gleichung (12.9)) und anschließend mit einem Bandpass gefiltert:

$$o(t) = b_1(t) + b_2(t) + s(t) \quad (12.9)$$

mit

$$b_1(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_S t) \sin(2\pi f_{T_1} t) \quad \text{und} \quad (\text{Wdh. Gl. (5.1)})$$

$$b_2(t) = A_2 \cdot \cos(2\pi f_S t) \sin(2\pi f_{T_2} t) \quad . \quad (\text{Wdh. Gl. (5.2)})$$

Als Bandpassfilter kam ein digitaler FIR-Filter (Finite Impulse Response) [17] nach der Frequenzabtastmethode [35] mit einer Filterlänge von 9 Koeffizienten zum Einsatz. Die Mittenfrequenz des Bandpasses entsprach der verwendeten globalen Trägerfrequenz f_{T_g} . Nach dem Bandpassfilter wurden die Hüllkurve des Interferenzsignals bestimmt, aus der erhaltenen Hüllkurve ein Abschnitt aus drei LSB-Perioden extrahiert und dieser auf eine Spitzenamplitude von 2 V skaliert. Der extrahierte und skalierte Signalabschnitt der Hüllkurve wurde anschließend mit den beiden Berechnungsverfahren Mustererkennung und Fourier-Analyse ausgewertet. Abbildung 12.15 zeigt den eben beschriebenen Berechnungsablauf des Simulators. Als Ergebnis wurden die beiden Distanzunterschiede Δs_{MK} und Δs_{FM} durch die Mustererkennung (MK) und die Fourier-Analyse (FA) erhalten.

Auf Grund der diskreten Signalverarbeitung durch den Simulator war die Bandbreite des Rauschsignals auf das 50-fache der verwendeten globalen Trägerfrequenz f_{T_g} begrenzt. Das weiße Rauschen wurde mittels einer gaußschen Zufallszahl pro Abtastpunkt erzeugt. Die

generierten Zufallszahlen lagen im Bereich $-1 \leq P \leq 1$ und wurden anschließend auf das verwendete Signal-Rausch-Verhältnis skaliert.

Dem simulierten *unverrauschten* Interferenzsignal $r_{\Delta t}(t)$ (Gleichung (5.4)):

$$r_{\Delta t}(t) = b_1(t) + b_2(t) \quad (\text{Wdh. Gl. (5.4)})$$

wurde weißes Rauschen mit den Signal-Rausch-Verhältnissen $6 \text{ dB} \leq SRV \leq 100 \text{ dB}$ überlagert. Jedes Signal-Rausch-Verhältnis wurde auf verschiedene Distanzunterschiede Δs im Bereich $0 \leq \Delta s \leq c/(8 \cdot f_{T_g})$ mit der Schrittweite $\Delta \phi = 2^\circ$ angewendet und das verrauschte Interferenzsignal $r'_{\Delta t}(t)$ mit der Mustererkennung und der Fourier-Analyse ausgewertet.

In Abhängigkeit des Signal-Rausch-Verhältnisses SRV ergibt sich nun für den allgemein formulierten normierten Mittelwert $\bar{\varepsilon}$ aus Gleichung (12.3) eine Funktion von SRV und diese wird als *Rauschabweichung* $\varepsilon(SRV)$ definiert (Gleichung (12.10)):

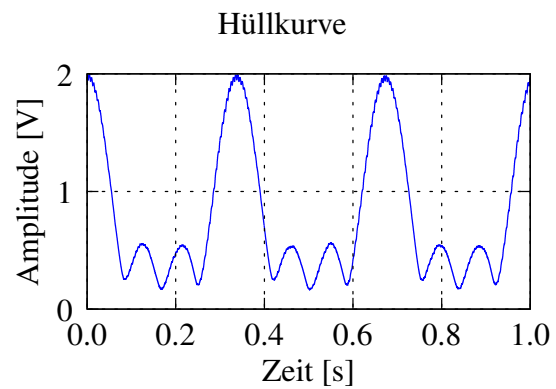
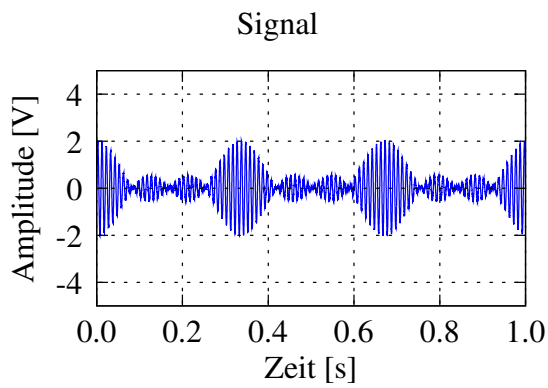
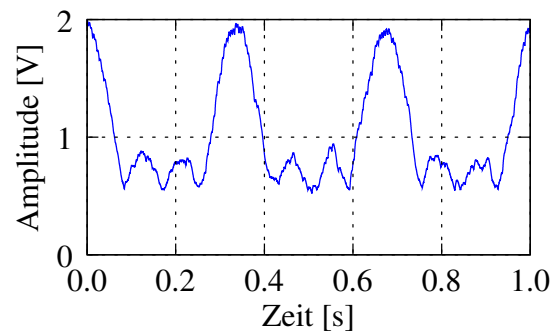
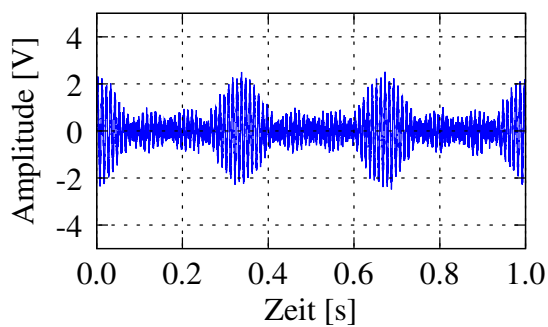
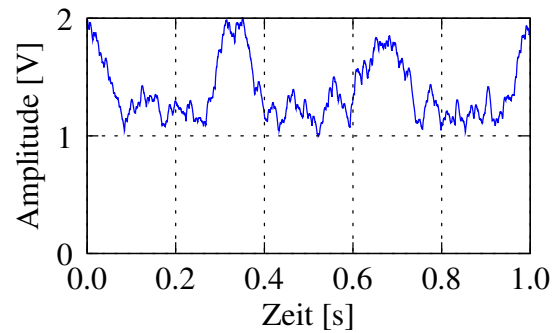
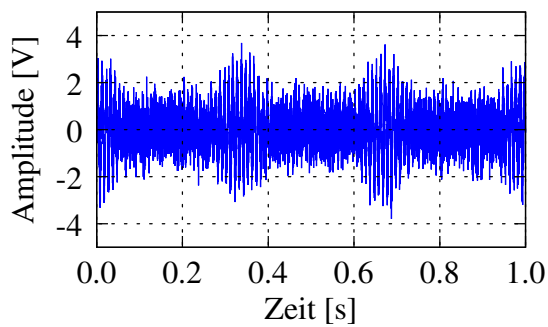
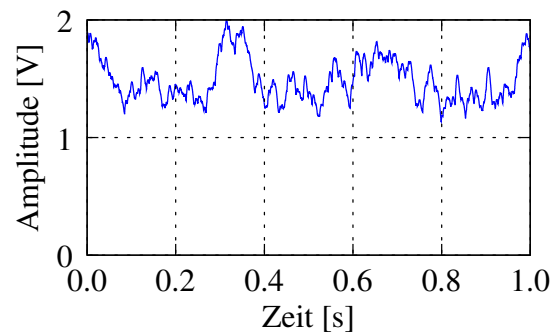
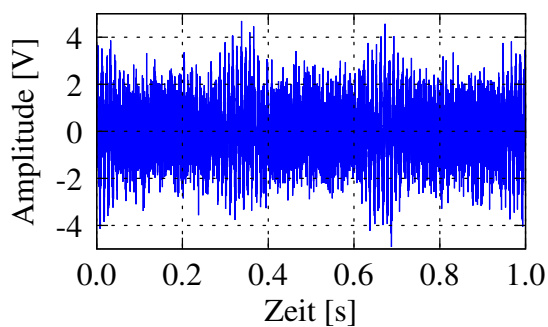
$$\varepsilon(SRV) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^{SRV} \quad (12.10)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta s_i - \Delta s'_i}{c/f_{T_g}} \quad (12.11)$$

ε_i^{SRV} aus Gleichung (12.10) beschreibt die normierte Einzelwertabweichung für alle durchgeführten Messungen der verschiedenen Distanzunterschiede Δs mit gleichem Signal-Rausch-Verhältnis SRV .

12.3.2 Simulationssignale

In den Abbildungen 12.16 bis 12.22 sind die vier Signal-Rausch-Verhältnisse $SRV = 100 \text{ dB}$, $SRV = 40 \text{ dB}$, $SRV = 20 \text{ dB}$ und $SRV = 6 \text{ dB}$ dargestellt. Alle Signal-Rausch-Verhältnisse wurden auf dasselbe Interferenzsignal $r_{\Delta t}(t)$ des Distanzunterschieds $\Delta s = 0 \text{ m}$ und den Musterfaktor $k = 2.00$ angewendet. Die linken Abbildungen zeigen das verrauschte Signal, in den rechten Abbildungen sind die jeweiligen detektierten und skalierten Hüllkurven zu sehen. Bei einem Signal-Rausch-Verhältnis von $SRV = 20 \text{ dB}$ bildet sich noch eine relativ rauschfreie Hüllkurve aus. Bis zu diesem Signal-Rausch-Verhältnis liegt für beide Berechnungsverfahren die Rauschabweichung $\varepsilon(SRV)$ noch in tolerierbaren Grenzen. Die Hüllkurve für das Signal-Rausch-Verhältnis $SRV = 10 \text{ dB}$ weist dagegen schon erhebliche Störungen auf. Hier ist es keinem der beiden Berechnungsverfahren mehr möglich, ein tolerierbares Ergebnis zu liefern. Für $SRV = 6 \text{ dB}$ war eine auswertbare Hüllkurve nicht mehr bestimmbar.

Abbildung 12.16: $SRV = 40$ dB.Abbildung 12.17: $SRV = 40$ dB.Abbildung 12.18: $SRV = 20$ dB.Abbildung 12.19: $SRV = 20$ dB.Abbildung 12.20: $SRV = 10$ dB.Abbildung 12.21: $SRV = 10$ dB.Abbildung 12.22: $SRV = 6$ dB.Abbildung 12.23: $SRV = 6$ dB.

Auf zusätzliche weitere Filterung und Glättung der Hüllkurve wurde bewusst verzichtet, um die grundlegende Robustheit der LSB-Methode und der Berechnungsverfahren gegenüber Störungen durch Rauschen abzuschätzen. Werden bereits durch die verwendeten einfachen Maßnahmen (Bandpass) zur Rauschunterdrückung ausreichend zufriedenstellende Ergebnisse erzielt, besitzt die LSB-Methode das Potenzial, durch aufwendigere Filterung die Robustheit gegenüber Rauschstörungen weiter zu steigern. Darüber hinaus bedeutet eine gute grundlegende Robustheit auch, dass bereits mit *geringem* technischen Aufwand brauchbare Ergebnis erzielt werden.

12.3.3 Mustererkennung

Abbildung 12.24 zeigt die Rauschabweichung $\varepsilon(SRV)$ der beiden Musterfaktoren $k=2.00$ und $k=4.00$ für das Berechnungsverfahren Mustererkennung. Die Fehlerbalken zeigen die größte positive d^+ und negative d^- Abweichung an. Für beide Musterfaktoren tritt bei einem Signal-Rausch-Verhältnis von $SRV \approx 20$ dB eine Rauschabweichung von $\varepsilon(SRV) \approx 2\%$ auf. Für ein 100 MHz LSB-Trägersignal entspricht dies einem Fehler von etwa 6 cm. Bei einer möglichen Auflösung von etwa 1 cm für das 100 MHz Trägersignal ist dieser Fehler nicht mehr zu tolerieren. Bei $SRV = 40$ dB beträgt der Fehler nur noch etwa 0.2 %. Das entspricht für das 100 MHz Signal etwa einem Fehler von 6 mm.

Damit die Mustererkennung für die LSB-Methode mit der verwendeten Rauschunterdrückung tolerierbare Ergebnisse liefert, sollte das Interferenzsignal, respektive die Hüllkurve, ein Signal-Rausch-Verhältnis von 40 dB nicht unterschreiten. Der Wechsel der Rauschabweichung $\varepsilon(SRV)$ in Abbildung 12.24 für den Musterfaktor $k=4.00$ zwischen $SRV = 10$ dB und $SRV = 20$ dB vom negativen in den positiven Bereich besagt nur, dass der Distanzunterschied $\Delta s'$ zuerst überwiegend kleiner und danach größer als der tatsächliche Distanzunterschied Δs bestimmt wurde.

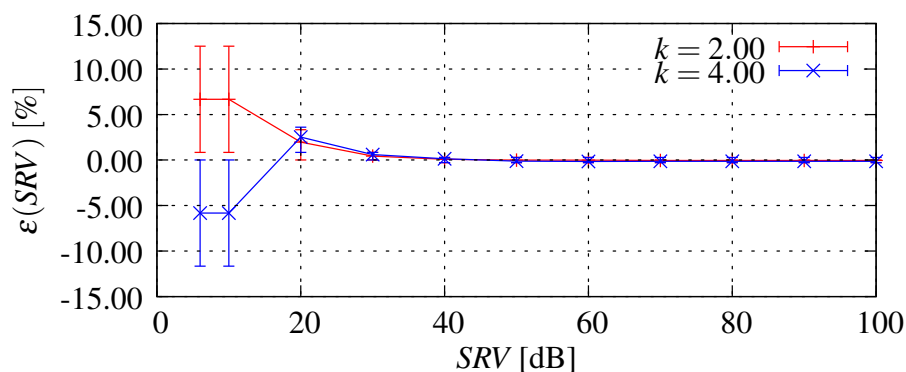


Abbildung 12.24: SRV für $k=2.00$ und $k=4.00$ mittels Mustererkennung.

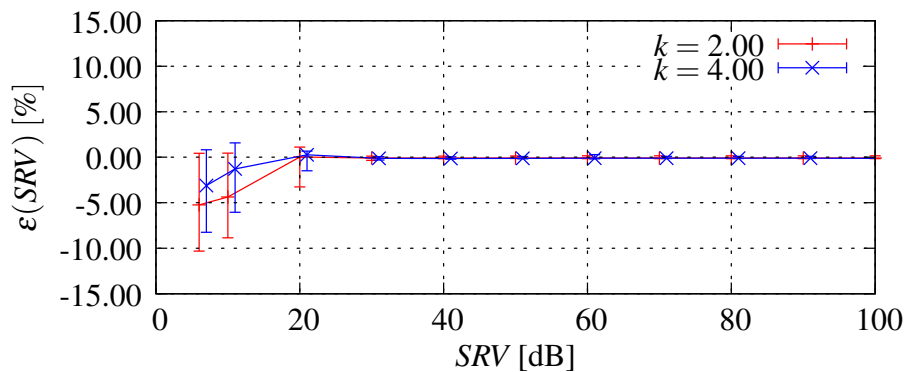


Abbildung 12.25: SRV für $k=2.00$ und $k=4.00$ mittels Fourier-Analyse. Für eine bessere Darstellung ist die Kurve $k=4.00$ leicht nach rechts unten verschoben.

12.3.4 Fourier-Analyse

Abbildungen 12.25 zeigt ebenfalls für die Musterfaktoren $k=2.00$ und $k=4.00$ die Rauschabweichung $\varepsilon(SRV)$; nun aber für das Berechnungsverfahren Fourier-Analyse. Analog zu den vorangegangenen Untersuchungen werden durch die Fehlerbalken die größte positive d^+ und negative d^- Abweichung dargestellt. Im Vergleich zur Mustererkennung beträgt bereits ab $SRV=30$ dB der Fehler nur noch 0.25 %, für ein 100 MHz Signal sind dies etwa 7.5 mm. Für die Fourier-Analyse liegt mit der verwendeten Rauschunterdrückung die Grenze des Signal-Rausch-Verhältnisses somit bei $SRV=30$ dB.

12.3.5 Auswertung

Die Simulationen zu den Einflüssen von Rauschen auf das Interferenzsignal zeigen, dass ab einem Signal-Rausch-Verhältnis von $SRV \geq 40$ dB mit der verwendeten einfachen Rauschunterdrückung des Bandpasses der Distanzunterschied Δs mit einem Fehler unter 0.2 % bestimmt wird. Ein Signal-Rausch-Abstand von $SRV \geq 40$ dB ist als relativ groß einzustufen, da beispielsweise für einen noch zu akzeptierenden WLAN-Empfang ein allgemein gebräuchliches Signal-Rausch-Verhältnis von $SRV \geq 10 - 15$ dB (ohne Beweis) angegeben wird. Beide Berechnungsverfahren weisen somit in ihrer verwendeten Form und mit den verwendeten Methoden zur Rauschunterdrückung nur eine geringe Toleranz gegenüber den Störungen durch Rauschen auf. Trotz der leicht besseren Eigentoleranz gegenüber Rauschen der Fourier-Analyse im Vergleich zur Mustererkennung besteht für beide Verfahren noch Entwicklungsbedarf. Der Abstand zwischen dem erreichten Signal-Rausch-Verhältnis und dem genannten Signal-Rausch-Verhältnis bei WLAN bewegt sich aber noch in einem Rahmen mit Entwicklungspotenzial, um mit höherwertigen Filtermethoden und zusätzlicher Glättung der Hüllkurve ein Signal-Rausch-Verhältnis vergleichbar zum WLAN zu erreichen.

13 Diskussion

Die vorliegende Arbeit beschrieb eine Methode zur Messung des Distanzunterschieds zwischen zwei verschiedenen Laufstrecken zweier elektromagnetischen Signale in einem elektrischen Leiter. Die auf den Namen LSB – *Localization by Superposing Beats* – getaufte Methode nutzt die auf Grund der unterschiedlichen Leitungslängen entstehenden unterschiedlichen Laufzeiten der Signale für die Bestimmung des Distanzunterschieds zwischen den beiden Signalquellen und dem Betrachtungspunkt. Am Betrachtungspunkt kommt es zur Superposition der beiden Signale und somit zur Entstehung eines Interferenzsignals. Die Genauigkeit der Bestimmung des Distanzunterschieds ist dabei von der Signalfrequenz der beiden Signale abhängig. Je größer die Signalfrequenz ist, desto genauer kann der Distanzunterschied bestimmt werden. Hohe Signalfrequenzen verlangen andererseits aber auch hohe Anforderungen an die Auswertungseinheit des entstehenden Interferenzsignals. Hier genau setzt die LSB-Methode an. Die LSB-Methode verwendet speziell parametrisierten Schwebungen als Ausgangssignale und transformiert dadurch die Auswertung der hochfrequenten Schwebungssignale in eine niederfrequente Hüllkurve des Interferenzsignals. Damit wird es möglich, die speziell parametrisierten Schwebungssignale von zum Beispiel einigen Gigahertz (aber nicht ausschließlich), durch die niederfrequente Hüllkurve des Interferenzsignals von einigen Hertz auszuwerten. Durch die spezielle Anpassung der Schwebungssignale wird die LSB-Methode weiterhin unabhängig von einer Zeitsynchronisation am Betrachtungspunkt. Allein die beiden Signalquellen müssen zueinander synchronisiert sein oder eine bekannte konstante Abweichung aufweisen.

Die Superposition (Überlagerung) der beiden Schwebungssignale am Betrachtungspunkt führt zu einem *ortsabhängigen* Interferenzmuster. Ändert sich der Distanzunterschied, ändert sich auch das Interferenzmuster des hochfrequenten Interferenzsignals. Die LSB-Methode bestimmt nun von diesem Interferenzsignal dessen Hüllkurve. Mit der Bestimmung der Hüllkurve erfolgt auch die Transformation der Auswertung des hochfrequenten Interferenzsignals in die niederfrequente Hüllkurve. Dies bringt besonders für die weitere digitale Verarbeitung einen entscheidenden Vorteil, da nun nicht mehr das hochfrequente Interferenzsignal digitalisiert werden muss, sondern nur noch die Hüllkurve. Da sich das Interferenzmuster des Interferenzsignals in Abhängigkeit des Distanzunterschieds ändert, ändert sich demzufolge auch das *Aussehen* der Hüllkurve. Die Hüllkurve, beziehungsweise das Muster der Hüllkur-

ve, wird abschließend für die Bestimmung des Distanzunterschieds ausgewertet.

Hierzu bietet die LSB-Methode, mit Stand dieser Arbeit, zwei Berechnungsverfahren an. Dies sind die Mustererkennung (Kapitel 10) und die Fourier-Analyse (Kapitel 11). Die Mustererkennung berechnet einen Satz von möglichen Mustern vor und vergleicht anschließend die Hüllkurve mit diesen Mustern. Die beste Übereinstimmung benennt dann den jeweiligen Distanzunterschied. Der Vorteil der Mustererkennung liegt darin, dass theoretisch einige wenige Stützpunkte für den Vergleich ausreichen. Die in dieser Arbeit verwendete Variante nutzte diese Möglichkeit allerdings nicht, sondern setzte eine Abtastrate von 10 000 Punkten/Sekunde für die Digitalisierung der Hüllkurve ein. Das zweite Berechnungsverfahren Fourier-Analyse unterzieht der digitalisierten Hüllkurve einer Fourier-Transformation und bestimmt für diese Hüllkurve dessen Phasenspektrum. Aus den Phasen des Spektrums wird anschließend der Distanzunterschied abgeleitet.

In den durchgeführten Experimenten (Kapitel 8 bis 11) zur Überprüfung der LSB-Theorie wurden verschiedene Messreihen aufgenommen. Die Ergebnisse der Experimente zeigten, dass für den verwendeten Aufbau der maximale Fehler bei der Bestimmung des Distanzunterschieds bei etwa $\pm 1^\circ$ Phase der globalen Trägerfrequenz der Schwebungssignale liegt. Für eine Trägerfrequenz von 100 MHz entspricht dies etwa ± 1 cm.

Die LSB-Methode basiert auf der Überlagerung der beiden Schwebungssignale am Betrachtungspunkt. Alle Störeinflüsse, insbesondere auf die Amplituden der Signale, beeinflussen das Messergebnis. Für die Bestimmung der Auswirkungen der Einflüsse von Signaldämpfung und überlagertem Rauschen wurden im Kapitel 12 hierzu Simulationen zur Untersuchung der Amplitudendiskrepanz und zum Rauschen durchgeführt. Die Simulationen zeigten, dass beide Störeinflüsse weitestgehend vermieden werden müssen, auch wenn die LSB-Methode gegenüber der Amplitudendiskrepanz bereits eine geringfügige Stabilität aufweist.

Die durchgeführten Betrachtungen zur LSB-Methode beschränkten sich ausschließlich auf die Bestimmung des Distanzunterschieds zwischen zwei verschiedenen Kabellängen. Zum Abschluss der Arbeit soll noch einmal der verworfene Gedanke aus der Einleitung (Kapitel 1) der Arbeit aufgenommen werden, die LSB-Methode in einem Funksystem einzusetzen. Prinzipiell ist die LSB-Methode für ein Funksystem einsetzbar und es gelten die selben Eigenschaften wie für das in der Arbeit untersuchte kabelgebundene System, sofern sich die Funksignale störungsfrei ausbreiten können. Störungen ergeben sich aber bereits durch die beiden Erscheinungen Mehrwegausbreitung und Amplitudendiskrepanz. Insbesondere bei einem Einsatz in geschlossenen Räumen wird sich eine Mehrwegausbreitung des Signals nicht unterdrücken lassen und es wird dadurch zu einer zusätzlichen Überlagerungen von phasenverschobenen Schwebungssignalen an der Antenne des Empfängers kommen. Im Außeneinsatz kann dieser Einfluss eventuell vernachlässigbar klein sein. Einem störenden

Einfluss der Amplitudendiskrepanz, insbesondere hervorgerufen durch unterschiedliche Störeinflüsse im Nahfeld der Sendeantennen, kann eventuell durch die Verwendung sehr hochfrequenter Trägersignale entgegengewirkt werden. Grundsätzlich ist zu bedenken, dass bei der LSB-Methode die Informationen zur Bestimmung des Distanzunterschieds in den Signalamplituden verankert sind und somit die LSB-Methode auch viele der bekannten Störeinflüsse von amplitudenmodulierte Signalen besitzt. Auf Grund der benötigten geringen Bandbreite sind Störungen durch breitbandiges Rauschen weniger kritisch, da sie sehr gut durch schmale Bandpassfilter mit hoher Güte unterdrückt werden. Wird sichergestellt, dass die Amplitudendiskrepanz näherungsweise Null gehalten und zusätzliche störende Überlagerungen durch Mehrwegausbreitung vermieden werden, ist die LSB-Methode eine Alternative zu bestehenden Systemen, da insbesondere die Empfänger der LSB-Methode technisch sehr einfach und dadurch sehr kostengünstigen aufgebaut werden können.

Doch welche anschließenden Arbeiten sind erst noch durchzuführen, ehe ein Funksystem aufgebaut wird? Derzeit ist die LSB-Methode nur in der Lage den Distanzunterschied innerhalb des einfachen Messbereichs (Abschnitt 6.7) zu bestimmen. An dieser Einschränkung sollte angesetzt und Lösungen für das Mehrdeutigkeitsproblem gefunden oder zum Beispiel vom Global Positioning System (GPS) adaptiert werden. Auch besitzen beide vorgestellten Berechnungsverfahren noch Entwicklungspotenzial beziehungsweise es werden andere Berechnungsverfahren gefunden, um eine schnelle und ressourcenschonende Bestimmung des Distanzunterschieds zu erzielen.

Zusammenfassend ist die LSB-Methode dadurch zu charakterisieren, dass sie einen Ansatz bietet, den Distanzunterschied zwischen zwei unterschiedlichen Entfernungen durch die Nutzung von hochfrequenten Signalen im Zentimeter- oder sogar im Millimeter-Bereich genau zu bestimmen, ohne die hochfrequenten Signale selbst auswerten zu müssen. Die Auswertung wird stattdessen mit einem niederfrequenten Signal durchgeführt, wodurch eine Auswertungseinheit mit einfachen technischen und kostengünstigen Mitteln aufgebaut werden kann.

Literaturverzeichnis

- [1] ADUNKA, F.: *Messunsicherheiten*. Essen : Vulkan, 2007
- [2] Analog Devices: *TruPwr Detector AD8361, LF to 2.5 GHz*. 2004
- [3] Analog Devices: *Analog Devices AD9959/PCB, Evaluation Board for 4-Channel 500 MSPS DDS with 10-Bit DACs*. 2005
- [4] Analog Devices: *Analog Devices AD9959, 4-Channel 500 MSPS DDS with 10-Bit DACs*. 2008
- [5] BAHL, P. ; PADMANABHAN, V.: RADAR: an in-building RF-based user location and tracking system. In: *Proceedings IEEE INFOCOM 2000* (2000), March
- [6] BALAKRISHNAN, H. ; BALIGA, R.: Lessons from Developing and Deploying the Cricket Indoor Location System. In: *MIT Computer Science and Artificial Intelligence Laboratory, (CSAIL)* (2003), November
- [7] BARTSCH, H.-J.: *Taschenbuch mathematischer Formeln*. 16. Auflage. Leipzig : Fachbuchverlag Leipzig, 1994
- [8] BÖGE, W. ; PLASSMANN, W.: *Vieweg Handbuch Elektrotechnik*. 4. Auflage. Wiesbaden : Vieweg + Teubner, 2007
- [9] BRIGHAM, E. O.: *FFT-Anwendungen*. München : R. Oldenbourg, 1997
- [10] COYLE, Lorcan ; YE, Juan ; LOUREIRO, Emerson ; KNOX, Stephen ; DOBSON, Simon ; NIXON, Paddy: A Proposed Approach to Evaluate the Accuracy of Tag-based Location Systems. In: *In USE 07: Workshop on Ubiquitous Systems Evaluation, Innsbruck, Austria, 2007. UbiComp 2007 Workshop Proceedings*, 2007, S. 292–296
- [11] DAHLMAYER, D.: Theorie der Zeitbereichsreflektometrie - Teil 1. In: *elektronik industrie* 2 (2001), S. 60–64
- [12] DAHLMAYER, D.: Theorie der Zeitbereichsreflektometrie - Teil 2. In: *elektronik industrie* 3 (2001), S. 48–51

- [13] DODEL, H. ; HÄUPLER, D.: *Satellitenavigation*. 2. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer, 2010
- [14] ERTEL, W.: *Grundkurs Künstliche Intelligenz*. 2. Auflage. Wiesbaden : Vieweg + Teubner, 2009
- [15] FAHRMEIR, L. ; KNEIB, T. ; LANG, S.: *Regression: Modelle, Methoden und Anwendungen*. 2. Auflage. Heidelberg : Springer, 2009
- [16] FINKENZELLER, K.: *RFID Handbuch*. 5. Auflage. München : Carl Hanser, 2008
- [17] GRÜNIGEN, Daniel C.: *Digitale Signalverarbeitung*. Leipzig : Carl Hanser, 2008
- [18] HELMUS, M. ; MEINS-BECKER, A. ; LAUSSAT, L. ; KELM, A.: *RFID in der Baulogistik*. 1. Auflage. Wiesbaden : Vieweg + Teubner, 2009
- [19] HERING, E. ; MARTIN, R. ; STOHRER, M.: *Physik für Ingenieure*. 5. Auflage. Düsseldorf : VDI, 1995
- [20] HIGHTOWER, J. ; BORRIELLO, G.: A Survey and Taxonomy of Location Systems for Ubiquitous Computing. In: *University of Washington, Technical Report UW-CSE 01-08-03* (2001), August
- [21] HIGHTOWER, J. ; WANT, R. ; BORRIELLO, G.: SpotON: An Indoor 3D Location Sensing Technology Based on RF Signal Strength. Seattle, WA : University of Washington, Department of Computer Science and Engineering, February 2000 (00-02-02). – UW CSE
- [22] JOECKEL, R. ; STOBER, M. ; HUEP, W.: *Elektronische Entfernungs- und Richtungs-messung*. 5. Auflage. Heidelberg : Wichmann, 2008
- [23] JOOST, R.: *BOUNCE: On-Chip Signalleitungen als Basis digitaler Zeitmessung*, Universität Rostock, Diss., 2010
- [24] KAHMEN, H.: *Angewandte Geodäsie: Vermessungskunde*. 20. Auflage. Berlin : Walter de Gruyter, 2006
- [25] KAPLAN, E. ; HEGARTY, C.: *Understanding GPS: Principles and Applications*. Second Edition. Norwood : Artech House, 2006
- [26] KARK, K. W.: *Antennen und Strahlungsfelder*. 3. Auflage. Wiesbaden : Vieweg + Teubner, 2010

- [27] KATALENIC, A. ; DRAGANJAC, I. ; MUTKA, A. ; BOGDAN, S.: Fast Visual Tracking and Localization in Multi-agent Systems. In: *Proc. of IEEE ICIEA 2009, Xi'an, China* (2009), S. 1864–1870
- [28] KNAUTH, S. ; JOST, C. ; KLAPPROTH, A.: iLOC: a localisation system for visitor tracking & guidance. In: *7th IEEE International Conference on Industrial Informatics* (2009)
- [29] KRAUS, K.: *Photogrammetrie: Verfeinerte Methoden und Anwendungen, Band 2*. 3. Auflage. Bonn : Dümmler, 1996
- [30] KRAUS, K.: *Photogrammetrie, Geometrische Information aus Photographien und Laserscanneraufnahmen*. 7. Auflage. Berlin : Gruyter, 2004
- [31] LEYBOLD Handblätter Physik: *Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Spannungsimpulsen auf Koaxialkabeln*. – P5.6.2.2
- [32] LIECKFELDT, D. ; YOU, J. ; TIMMERMANN, D.: Exploiting RF-Scatter: Human Localization with bistatic passive UHF RFID-Systems. In: *5th IEEE Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and Communications, (WiMob'09) IEEE-WiMob*, IEEE Computer Society, October 2009. – ISBN 978-0-7695-3841-9, S. 179–184
- [33] LUDLOFF, A.: *Praxiswissen Radar und Radarsignalverarbeitung*. 3. Auflage. Braunschweig : Vieweg, 2009
- [34] MARÓTI, M. ; KUSÝ, B. ; BALOGH, G. ; VÖLGYESI, P. ; NÁDAS, A. ; MOLNÁR, K. ; DÓRA, S. ; LÉDECZI, A.: Radio Interferometric Geolocation. In: *In Proceedings of the 3rd ACM Conference on Embedded Networked Sensor Systems* (2005), November
- [35] MEYER, M.: *Signalverarbeitung: Analoge und digitale Signale, Systeme und Filter*. 5. Auflage. Wiesbaden : Vieweg + Teubner, 2009
- [36] Microlab: *Microlab Line Stretcher, SR series (SR-05F), 500-4000 MHz*. 2009
- [37] NI, Lionel M. ; LIU, Yunhao ; LAU, Yiu C. ; PATIL, Abhishek P.: LANDMARC: Indoor Location Sensing Using Active RFID. In: *Wireless Networks* 10 (2004), Nr. 6, S. 701–710
- [38] PEPPER, P. ; HOFSTEDT, P.: *Funktionale Programmierung*. Heidelberg : Springer, 2006
- [39] ROTH, J.: *Mobile Computing - Grundlagen, Technik, Konzepte*. 2. Auflage. Heidelberg : dpunkt, 2005

- [40] SAVVIDES, A. ; HAN, C.C. ; STRIVASTAVA, M.B.: Dynamic Fine Grained Localization in ad-hoc Networks of Sensors. In: *Proceedings of the 5th International Conference on Mobile Computing and Networking, MobiCom 2001* (2001), July, S. 166–179
- [41] STARNER, T. ; MANN, S. ; RHODES, B. ; LEVINE, J. ; HEALEY, J. ; KIRSCH, D. ; PICARD, R. ; PENTLAND, A.: Augmented reality through wearable computing. In: *PRESENCE* 6 (1997), S. 386–398
- [42] STEGGLES, P. ; GSCHWIND, S.: The Ubisense Smart Space Platform. In: *Adjunct Proceedings of the Third International Conference on Pervasive Computing* Bd. 191, 2005, S. 73–76
- [43] STIRNER, E.: *Antennen*. 2. Auflage. Heidelberg : Hüthig, 1984
- [44] TAYLOR, J. R.: *Fehleranalyse*. 1. Auflage. Weinheim : VCH, 1988
- [45] Ubisense Ltd.: *Systemübersicht: Ubisense Series 7000 System*. 2007
- [46] WANT, R. ; HOPPER, A. ; FALCÃO, V. ; GIBBONS, J.: The Active Badge Location System. In: *ACM Transactions on Information Systems* (1992), January
- [47] WARD, A. ; JONES, A. ; HOPPER, A.: A new location technique for the active office. In: *IEEE Personal Communications* 4 (1997), Nr. 5, S. 42–47
- [48] ZINKE, O. ; BRUNSWIG, H.: *Hochfrequenztechnik* 2. Berlin : Springer, 1999

A Messwerte

A.1 Mustererkennung

A.1.1 Interferenzpunktverschiebung in Richtung Signalquelle 1

Jede Messkurve wurde mit einer Punktmenge von 5000 Punkten aufgezeichnet. Für die unterschiedlichen Längen der LSB-Periode der verschiedenen Musterfaktoren k wurden folgende Abtastfrequenzen F_{Abt} verwendet: $k = 0.25 \mid F_{Abt} = 12.5 \text{ kHz}$; $k = 0.50 \mid F_{Abt} = 5.0 \text{ kHz}$; $k = 2.00 \mid F_{Abt} = 5.0 \text{ kHz}$; $k = 4.00 \mid F_{Abt} = 2.5 \text{ kHz}$.

Tabelle A.1: Verschiebung des Interferenzpunkts in Richtung Signalquelle 1.

$k = f_s/f_m$			0.25		0.50		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	p [mm]	f_{T_g} [MHz]	$\overline{\Delta s_M}$ [cm]	δe [cm]	$\overline{\Delta s_M}$ [cm]	δe [cm]	$\overline{\Delta s_M}$ [cm]	δe [cm]	$\overline{\Delta s_M}$ [cm]	δe [cm]
0	1	50	0.20	0.60	0.43	0.50	0.33	0.80	1.07	1.20
		100	0.17	0.30	0.13	0.20	0.40	0.40	0.77	0.90
		150	0.03	0.10	0.03	0.10	0.40	0.40	0.90	1.00
	2	50	0.20	0.60	0.27	0.40	0.80	0.80	1.07	1.20
		100	0.20	0.40	0.13	0.20	0.40	0.40	1.13	1.40
		150	0.07	0.20	0.00	0.00	0.40	0.40	0.87	1.00
	5	50	0.17	0.50	0.17	0.50	0.33	1.00	1.17	1.50
		100	0.17	0.50	0.00	0.00	0.50	0.50	0.83	1.00
		150	0.00	0.00	0.00	0.00	0.33	0.50	1.00	1.00
1	1	50	0.97	0.60	0.40	0.60	1.57	0.70	1.07	0.20
		100	0.73	0.30	1.10	0.10	1.33	0.50	2.50	1.50
		150	0.87	0.30	1.03	0.10	1.40	0.40	1.60	0.60
	2	50	1.00	0.60	0.40	0.60	0.67	0.40	1.07	0.20
		100	0.67	0.40	1.00	0.00	1.40	0.60	2.60	1.60
		150	0.93	0.20	0.93	0.20	1.40	0.40	1.60	0.60
	5	50	1.17	1.00	1.00	0.00	1.33	0.50	1.17	0.50
		100	0.83	0.50	1.00	0.00	1.50	0.50	2.50	1.50
		150	0.83	0.50	1.00	0.00	1.50	0.50	1.83	1.00
	1	50	1.53	0.50	1.33	0.70	2.30	0.60	3.10	1.10
		100	2.17	0.30	2.10	0.10	2.30	0.40	3.40	1.40
		150	2.13	0.20	1.93	0.10	2.40	0.40	2.90	0.90
		50	1.47	0.60	1.93	0.60	2.53	0.60	3.00	1.00

$k = f_s/f_m$			0.25		0.50		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	p [mm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
2	2	100	2.20	0.40	2.20	0.20	2.33	0.40	3.40	1.40
		150	2.20	0.20	2.13	0.20	2.40	0.40	3.00	1.00
		50	1.67	0.50	1.83	0.50	2.17	1.00	3.00	1.00
	5	100	2.17	0.50	2.50	0.50	2.33	0.50	2.50	0.50
		150	2.00	0.00	2.00	0.00	2.50	0.50	3.00	1.00
		50	2.60	1.10	3.17	0.20	3.20	0.30	3.17	0.30
3	1	100	2.97	0.30	2.97	0.10	3.33	0.60	4.27	1.30
		150	3.03	0.40	3.13	0.20	3.37	0.50	4.07	1.20
		50	2.60	1.20	3.13	0.20	3.13	0.20	3.73	2.00
	2	100	2.93	0.20	2.93	0.20	3.33	0.60	4.33	1.40
		150	3.00	0.40	3.13	0.20	3.60	0.60	4.07	1.20
		50	2.67	1.00	2.67	0.50	3.33	0.50	3.50	0.50
	5	100	3.00	0.50	3.00	0.00	3.83	1.00	4.33	1.50
		150	3.17	0.50	3.00	0.00	3.50	0.50	3.83	1.00
		50	4.60	0.60	3.93	0.40	4.37	0.60	4.93	1.00
4	1	100	3.83	0.30	4.30	0.30	4.43	0.60	5.23	1.30
		150	4.00	0.00	4.07	0.10	4.43	0.50	4.77	0.90
		50	4.60	0.60	3.47	0.80	4.33	0.60	4.93	1.00
	2	100	3.73	0.40	3.80	0.20	4.60	0.60	5.27	1.40
		150	4.00	0.00	4.20	0.40	4.47	0.60	5.27	1.40
		50	4.00	1.00	3.50	0.50	4.00	0.00	4.83	1.00
	5	100	3.67	0.50	4.00	0.00	4.67	1.00	4.83	1.00
		150	4.00	0.00	4.00	0.00	4.33	0.50	5.00	1.00
		50	4.60	0.40	4.97	0.10	5.43	0.50	5.63	1.50
5	1	100	5.30	0.30	5.17	0.20	5.57	0.60	6.10	1.20
		150	5.27	0.40	5.10	0.10	5.50	0.50	5.90	0.90
		50	4.60	0.40	4.67	1.00	5.00	0.40	5.67	1.60
	2	100	5.40	0.40	5.13	0.20	5.67	0.80	6.07	1.20
		150	5.27	0.40	5.00	0.00	5.60	0.60	6.40	1.60
		50	5.00	0.00	4.67	1.00	5.67	1.00	5.50	1.50
	5	100	5.50	0.50	5.00	0.00	5.50	0.50	6.00	1.00
		150	5.33	0.50	5.00	0.00	5.50	0.50	6.33	1.50
		50	4.60	1.50	5.73	0.40	6.20	0.40	6.87	0.90
6	1	100	6.67	0.80	6.07	0.10	6.60	0.60	7.00	1.00
		150	6.30	0.40	6.07	0.20	6.53	0.60	7.23	1.30
		50	5.13	1.60	5.73	0.40	6.20	0.40	6.80	0.80
	2	100	6.67	0.80	6.13	0.20	6.60	0.60	7.00	1.00
		150	6.33	0.40	6.07	0.20	6.53	0.60	7.00	1.20
		50	4.67	1.50	5.67	0.50	6.00	0.00	7.00	1.00
	5	100	5.83	0.50	6.33	0.50	6.50	0.50	7.00	1.00
		150	6.33	0.50	6.00	0.00	6.50	0.50	7.00	1.00
		50	6.83	0.60	6.63	0.40	7.30	0.30	7.83	1.60
	1	100	6.73	0.30	7.40	0.40	7.93	1.00	8.07	1.10

$k = f_s/f_m$			0.25		0.50		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	p [mm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
7	2	150	7.37	0.50	7.20	0.20	7.53	0.60	8.00	1.00
		50	6.87	0.60	6.67	0.40	6.40	0.60	8.27	1.60
		100	6.67	0.40	7.40	0.40	7.87	1.00	8.13	1.20
	5	150	7.40	0.60	7.20	0.20	7.33	0.60	8.00	1.00
		50	6.83	0.50	6.67	0.50	7.33	1.00	8.17	2.00
		100	7.33	0.50	7.00	0.00	7.50	1.00	8.50	2.00
8	1	150	7.33	0.50	7.33	0.50	7.50	0.50	8.00	1.00
		50	7.50	0.50	7.57	0.50	8.20	0.20	8.40	0.40
		100	8.27	0.30	8.27	0.30	8.80	1.00	9.00	1.00
	2	150	8.43	0.50	8.20	0.20	8.53	0.60	9.10	1.20
		50	7.40	0.60	7.53	0.60	8.20	0.20	8.40	0.40
		100	8.33	0.40	8.33	0.40	8.80	1.00	9.00	1.00
	5	150	8.33	0.60	8.20	0.20	8.53	0.60	9.07	1.20
		50	7.50	0.50	7.83	0.50	8.00	0.00	8.50	0.50
		100	8.33	0.50	8.17	0.50	8.67	1.00	9.00	1.00
9	1	150	8.50	0.50	8.33	0.50	8.50	0.50	8.83	1.00
		50	8.30	0.90	8.43	0.60	9.17	0.30	10.23	1.50
		100	9.37	0.70	9.17	0.20	9.90	0.90	10.07	1.30
	2	150	9.40	0.40	9.27	0.30	9.60	0.60	10.27	1.40
		50	8.33	0.80	8.47	0.60	9.07	0.20	9.73	1.40
		100	9.33	0.60	9.27	0.40	10.00	1.00	10.40	1.80
	5	150	9.40	0.40	9.07	0.20	9.60	0.60	10.27	1.40
		50	8.33	1.00	8.83	0.50	9.17	0.50	10.00	1.50
		100	9.17	0.50	9.17	0.50	9.83	1.00	10.33	1.50
10	1	150	9.50	0.50	9.17	0.50	9.50	0.50	10.00	1.00
		50	10.13	0.60	9.37	0.70	10.20	0.40	10.50	0.70
		100	10.03	0.40	10.50	0.50	10.90	0.90	11.70	1.70
	2	150	10.37	0.40	10.20	0.20	10.70	0.70	11.60	1.60
		50	10.13	0.60	10.00	0.40	10.20	0.40	11.13	2.40
		100	10.33	0.60	10.00	0.00	11.00	1.00	11.60	1.60
	5	150	10.33	0.40	10.20	0.20	10.40	0.40	11.60	1.60
		50	10.33	1.00	9.83	0.50	9.83	0.50	11.00	2.00
		100	10.33	0.50	10.50	0.50	11.00	1.00	11.50	1.50
11	1	150	10.33	0.50	10.50	0.50	11.00	1.00	11.50	1.50
		50	10.53	0.50	10.67	0.70	11.03	0.20	12.13	1.40
		100	11.33	0.40	11.30	0.30	11.70	0.70	12.40	1.70
	2	150	11.23	0.30	11.27	0.40	11.60	0.60	12.27	1.30
		50	10.47	0.60	10.67	0.80	11.00	0.20	12.13	1.40
		100	11.40	0.40	11.20	0.20	11.60	0.60	12.40	1.60
	5	150	11.27	0.40	11.27	0.40	11.60	0.60	12.33	1.40
		50	10.67	0.50	10.67	0.50	11.00	0.00	11.50	1.00
		100	11.50	0.50	11.50	0.50	11.50	0.50	12.50	1.50

$k = f_s/f_m$			0.25		0.50		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	p [mm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
		150	11.33	0.50	11.50	0.50	11.50	0.50	12.33	1.50
12	1	50	11.10	1.50	12.00	0.00	12.20	0.20	12.27	0.40
		100	12.60	0.70	12.47	0.60	12.77	0.80	13.60	1.60
		150	12.17	0.20	12.47	0.50	12.80	0.80	13.50	1.50
	2	50	11.07	1.60	12.00	0.00	12.20	0.20	12.27	0.40
		100	12.67	0.80	12.47	0.60	12.73	0.80	13.60	1.60
		150	12.13	0.20	12.53	0.60	12.80	0.80	13.40	1.40
	5	50	11.00	1.50	12.00	0.00	12.33	0.50	12.17	0.50
		100	12.50	0.50	12.50	0.50	12.83	1.00	13.50	1.50
		150	12.00	0.00	12.50	0.50	12.67	1.00	13.50	1.50
13	1	50	13.20	0.50	12.97	0.10	13.10	0.10	14.00	1.20
		100	13.63	0.80	13.50	0.50	13.83	1.10	14.57	1.60
		150	13.30	0.30	13.57	0.60	13.77	0.90	14.53	1.70
	2	50	13.20	0.40	12.93	0.20	13.53	1.20	13.93	1.20
		100	13.67	0.80	13.73	1.00	13.73	0.80	14.87	2.40
		150	13.40	0.40	13.67	0.80	14.07	1.20	14.47	1.60
	5	50	13.17	0.50	12.83	0.50	13.50	0.50	14.17	1.50
		100	13.67	1.00	13.50	0.50	14.00	1.00	14.17	1.50
		150	13.50	0.50	13.50	0.50	13.83	1.00	14.50	1.50
14	1	50	13.53	0.50	13.83	0.20	14.20	0.20	14.80	1.40
		100	14.33	0.50	14.73	0.80	14.70	1.00	15.30	1.50
		150	14.23	0.30	14.70	0.70	14.97	1.00	15.43	1.50
	2	50	13.47	0.60	13.87	0.20	14.20	0.20	15.13	1.40
		100	14.27	0.40	14.73	0.80	15.00	1.40	15.27	1.40
		150	14.27	0.40	14.40	0.40	15.00	1.00	15.40	1.40
	5	50	13.67	0.50	13.67	0.50	14.67	1.00	14.67	1.50
		100	14.33	0.50	14.50	0.50	14.83	1.00	15.33	1.50
		150	14.00	0.00	14.50	0.50	15.00	1.00	15.50	1.50
15	1	50	14.50	0.90	14.70	0.30	14.93	0.40	15.03	0.70
		100	15.37	0.50	15.30	0.50	15.43	0.50	15.50	0.50
		150	15.13	0.20	15.43	0.50	15.50	0.50	15.50	0.50
	2	50	14.47	1.00	14.80	0.20	14.87	0.40	15.00	0.80
		100	15.33	0.40	15.27	0.40	15.40	0.40	15.40	0.40
		150	15.07	0.20	15.40	0.40	15.27	0.40	15.33	0.40
	5	50	14.50	1.00	15.00	0.00	14.83	0.50	15.17	0.50
		100	15.33	0.50	15.50	0.50	15.50	0.50	15.50	0.50
		150	15.00	0.00	15.50	0.50	15.50	0.50	15.50	0.50

A.1.2 Interferenzpunktverschiebung in Richtung Signalquelle 2

Jede Messkurve wurde mit einer Punktmenge von 5000 Punkten aufgezeichnet. Für die unterschiedlichen Längen der LSB-Periode der verschiedenen Musterfaktoren k wurden fol-

gende Abtastfrequenzen F_{Abt} verwendet: $k = 0.25 \mid F_{Abt} = 12.5 \text{ kHz}$; $k = 0.50 \mid F_{Abt} = 12.5 \text{ kHz}$; $k = 2.00 \mid F_{Abt} = 5.0 \text{ kHz}$; $k = 4.00 \mid F_{Abt} = 2.5 \text{ kHz}$.

Tabelle A.2: Verschiebung des Interferenzpunkts in Richtung Signalquelle 2.

$k = f_s/f_m$			0.25		0.50		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	p [mm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
0	1	50	-0.67	0.90	-0.40	0.40	-0.23	0.70	-0.27	0.60
		100	-0.27	0.50	-0.13	0.20	-0.00	0.00	-0.10	0.30
		150	-0.13	0.20	-0.13	0.20	-0.00	0.00	-0.07	0.20
	2	50	-0.70	1.00	-0.40	0.40	-0.17	0.50	-0.27	0.60
		100	-0.30	0.50	-0.13	0.20	-0.00	0.00	-0.13	0.40
		150	-0.13	0.20	-0.07	0.20	-0.00	0.00	-0.07	0.20
	5	50	-0.67	1.00	-0.50	0.50	-0.17	0.50	-0.17	0.50
		100	-0.33	0.50	-0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.00
		150	-0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.00
-1	1	50	-0.97	0.60	-1.30	0.30	-0.77	0.30	-0.40	1.00
		100	-0.97	0.20	-1.07	0.10	-0.57	0.60	-0.10	1.00
		150	-1.30	0.50	-1.00	0.00	-0.60	0.40	-0.17	0.90
	2	50	-1.00	0.60	-1.40	0.40	-1.00	1.00	-0.40	1.00
		100	-1.00	0.20	-1.23	0.50	-0.57	0.60	-0.13	1.00
		150	-1.30	0.50	-1.00	0.00	-0.60	0.40	-0.30	0.80
	5	50	-1.00	0.50	-1.50	0.50	-1.00	1.00	-0.33	1.00
		100	-1.00	0.00	-1.17	0.50	-0.50	0.50	-0.00	1.00
		150	-1.33	0.50	-1.00	0.00	-0.50	0.50	-0.17	1.00
-2	1	50	-1.87	0.80	-2.20	0.20	-1.87	0.20	-0.60	1.40
		100	-1.83	0.50	-1.93	0.10	-1.80	0.20	-1.13	0.90
		150	-2.03	0.20	-2.20	0.20	-1.83	0.30	-1.33	0.80
	2	50	-1.87	0.80	-2.20	0.20	-1.87	0.20	-0.60	1.40
		100	-1.83	0.50	-1.87	0.20	-1.80	0.20	-1.07	1.00
		150	-2.07	0.20	-2.20	0.20	-2.00	0.00	-1.33	0.80
	5	50	-2.00	1.00	-2.83	1.00	-1.67	0.50	-0.67	1.50
		100	-1.83	0.50	-2.00	0.00	-1.50	0.50	-0.83	1.50
		150	-2.00	0.00	-2.00	0.00	-2.00	0.00	-1.33	1.00
-3	1	50	-3.07	0.90	-2.97	0.10	-2.80	0.30	-2.23	0.90
		100	-2.80	0.60	-2.93	0.20	-2.83	0.20	-2.03	1.00
		150	-3.10	0.20	-3.17	0.20	-2.87	0.20	-2.10	0.90
	2	50	-3.10	0.80	-2.93	0.20	-2.47	1.20	-2.40	0.80
		100	-2.87	0.60	-2.93	0.20	-2.87	0.20	-2.07	1.00
		150	-3.13	0.20	-3.27	0.40	-2.87	0.40	-2.20	0.80
	5	50	-3.00	1.00	-3.17	0.50	-2.83	0.50	-2.33	1.00
		100	-2.83	0.50	-3.00	0.00	-2.67	0.50	-2.00	1.00
		150	-3.17	0.50	-3.17	0.50	-3.17	0.50	-2.50	0.50
	1	50	-3.50	0.90	-3.97	0.10	-3.60	0.40	-3.23	1.70
		100	-4.03	0.40	-4.17	0.20	-3.70	0.40	-3.07	1.00

$k = f_s/f_m$			0.25		0.50		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	p [mm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
-4	2	150	-4.20	0.50	-4.20	0.20	-4.00	0.20	-3.30	0.70
		50	-3.50	0.80	-4.00	0.00	-3.60	0.40	-3.30	1.50
		100	-4.00	0.40	-4.13	0.20	-3.67	0.40	-3.13	1.00
	5	150	-4.23	0.50	-4.20	0.20	-3.67	0.40	-3.40	0.60
		50	-3.50	1.00	-4.00	0.00	-3.83	0.50	-3.50	1.50
		100	-4.00	0.50	-4.00	0.00	-3.50	0.50	-3.17	1.50
-5	1	150	-4.17	0.50	-4.50	0.50	-3.83	0.50	-3.50	0.50
	2	50	-5.00	0.70	-4.90	0.30	-4.57	0.50	-4.07	1.00
		100	-4.87	0.30	-5.03	0.10	-4.73	0.30	-4.00	1.00
		150	-5.17	0.30	-5.33	0.40	-5.00	0.20	-4.33	1.00
	5	50	-5.00	0.60	-5.13	0.40	-4.27	1.20	-4.07	1.00
		100	-4.87	0.20	-5.07	0.20	-4.67	0.40	-4.00	1.00
		150	-5.13	0.20	-5.33	0.40	-5.00	0.20	-4.33	1.00
	5	50	-5.00	0.50	-5.17	0.50	-4.33	1.00	-4.17	1.00
		100	-4.83	0.50	-5.00	0.00	-4.50	0.50	-4.00	1.00
		150	-5.17	0.50	-5.17	0.50	-5.17	0.50	-4.33	1.00
-6	1	50	-5.40	1.00	-6.60	0.60	-5.60	0.40	-4.93	2.00
		100	-5.90	0.20	-6.40	0.40	-5.70	0.30	-5.33	0.90
		150	-6.07	0.30	-6.37	0.40	-6.03	0.10	-5.20	0.80
	2	50	-5.40	1.00	-6.60	0.60	-5.60	0.40	-5.00	2.00
		100	-5.93	0.20	-6.40	0.40	-5.80	0.20	-5.40	0.80
		150	-6.13	0.40	-6.47	0.60	-5.87	0.20	-5.20	0.80
	5	50	-5.50	1.00	-6.50	1.50	-5.50	0.50	-5.00	2.00
		100	-6.00	0.00	-6.00	0.00	-6.00	0.00	-5.17	1.00
		150	-6.17	0.50	-6.50	0.50	-6.00	0.00	-5.83	0.50
-7	1	50	-7.10	0.40	-7.33	0.50	-6.53	0.50	-5.97	1.10
		100	-7.03	0.30	-7.30	0.30	-6.63	0.40	-5.83	1.20
		150	-7.10	0.20	-7.40	0.50	-6.93	0.20	-6.40	0.60
	2	50	-7.13	0.40	-7.37	0.50	-6.53	0.50	-6.07	1.00
		100	-6.93	0.40	-7.40	0.40	-6.67	0.40	-5.87	1.20
		150	-7.07	0.20	-7.40	0.50	-6.93	0.20	-6.40	0.60
	5	50	-7.17	0.50	-7.17	0.50	-6.50	0.50	-6.17	1.00
		100	-7.00	0.50	-7.00	0.00	-6.67	0.50	-6.33	1.00
		150	-7.00	0.00	-7.33	0.50	-6.83	0.50	-6.50	0.50
-8	1	50	-7.77	1.10	-8.37	0.40	-7.40	0.60	-7.17	1.50
		100	-7.57	0.50	-8.10	0.10	-7.60	0.50	-7.60	0.50
		150	-8.00	0.00	-8.37	0.40	-8.00	0.20	-7.70	0.30
	2	50	-7.80	1.00	-8.33	0.40	-7.40	0.60	-7.17	1.50
		100	-7.60	0.50	-8.37	0.50	-7.63	0.50	-7.63	0.50
		150	-8.00	0.00	-8.47	0.60	-8.20	0.20	-7.80	0.20
	5	50	-7.83	1.00	-8.17	0.50	-7.50	0.50	-6.50	2.00
		100	-7.50	0.50	-8.17	0.50	-7.83	0.50	-7.33	1.00

$k = f_s/f_m$			0.25		0.50		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	p [mm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
		150	-8.00	0.00	-8.50	0.50	-8.00	0.00	-7.83	0.50
-9	1	50	-8.80	0.30	-9.27	0.30	-8.43	0.70	-8.03	1.00
		100	-8.97	0.20	-9.23	0.40	-8.63	0.50	-7.87	1.30
		150	-8.87	0.20	-9.57	0.60	-9.10	0.30	-8.63	0.70
	2	50	-8.87	0.20	-9.33	0.40	-8.80	0.50	-7.93	1.20
		100	-9.00	0.20	-9.37	0.50	-8.67	0.50	-7.93	1.20
		150	-8.93	0.20	-9.57	0.60	-9.00	0.00	-8.87	0.20
	5	50	-8.83	0.50	-9.33	0.50	-8.67	0.50	-8.00	1.00
		100	-9.00	0.00	-9.33	0.50	-8.67	0.50	-8.17	1.00
		150	-9.00	0.00	-9.33	0.50	-9.00	0.00	-9.00	0.50
-10	1	50	-9.50	0.90	-10.13	0.20	-9.47	0.60	-8.63	2.00
		100	-9.80	0.50	-10.33	0.40	-9.93	0.60	-9.47	0.80
		150	-9.97	0.10	-10.47	0.60	-10.00	0.00	-9.80	0.50
	2	50	-9.50	0.80	-10.07	0.20	-9.47	0.60	-8.00	2.00
		100	-9.83	0.50	-10.27	0.40	-9.93	0.60	-9.47	0.80
		150	-10.00	0.00	-10.47	0.60	-10.00	0.00	-9.97	0.50
	5	50	-9.50	1.00	-10.17	0.50	-9.33	1.00	-8.00	2.00
		100	-9.83	0.50	-10.50	0.50	-10.00	0.00	-9.17	1.00
		150	-10.00	0.00	-10.50	0.50	-10.00	0.00	-9.67	1.00
-11	1	50	-10.37	1.00	-11.03	0.10	-10.33	0.70	-9.83	1.30
		100	-10.60	0.50	-11.27	0.30	-10.90	0.10	-10.13	1.40
		150	-10.97	0.10	-11.53	0.60	-11.17	0.20	-10.77	0.30
	2	50	-10.40	1.00	-11.07	0.20	-10.40	0.60	-9.70	1.50
		100	-10.63	0.50	-11.33	0.40	-10.80	0.20	-10.17	1.40
		150	-11.00	0.00	-11.53	0.60	-11.27	0.40	-10.80	0.20
	5	50	-10.33	1.00	-11.00	0.00	-10.83	0.50	-9.83	1.50
		100	-10.50	0.50	-11.33	0.50	-11.00	0.00	-10.33	1.00
		150	-11.00	0.00	-11.50	0.50	-10.83	0.50	-11.00	0.00
-12	1	50	-10.77	1.50	-12.00	0.10	-11.40	0.60	-11.50	0.80
		100	-11.73	0.40	-12.13	0.20	-11.87	0.20	-11.40	0.70
		150	-11.93	0.20	-12.67	0.70	-12.17	0.30	-11.97	0.10
	2	50	-10.77	1.50	-12.00	0.20	-11.40	0.60	-11.53	0.80
		100	-11.73	0.40	-12.40	0.50	-11.77	0.50	-11.43	0.60
		150	-11.93	0.20	-12.47	0.60	-12.13	0.20	-11.87	0.40
	5	50	-10.83	1.50	-12.17	0.50	-11.50	1.50	-11.00	1.50
		100	-11.67	0.50	-12.50	0.50	-11.83	0.50	-11.00	1.50
		150	-12.00	0.00	-12.50	0.50	-12.00	0.00	-11.83	0.50
-13	1	50	-12.00	1.40	-12.73	0.30	-12.37	0.70	-11.77	1.30
		100	-12.57	0.60	-13.43	0.50	-13.13	0.20	-12.37	0.70
		150	-12.80	0.40	-13.73	0.80	-13.17	0.20	-12.83	0.40
	2	50	-12.00	1.40	-13.17	0.50	-12.97	0.50	-11.80	1.20
		100	-12.57	0.60	-13.43	0.50	-13.13	0.20	-12.67	0.60
		150	-12.87	0.40	-13.67	0.80	-13.20	0.20	-12.67	0.40

$k = f_s/f_m$			0.25		0.50		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	p [mm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
-14	5	50	-12.00	1.50	-13.33	0.50	-12.83	0.50	-12.00	1.00
		100	-12.67	0.50	-13.50	0.50	-13.00	0.00	-12.67	0.50
		150	-12.83	0.50	-13.83	1.00	-13.17	0.50	-12.83	0.50
	1	50	-13.87	0.30	-13.70	0.30	-13.27	0.80	-13.50	0.70
		100	-13.50	0.80	-14.33	0.40	-14.07	0.30	-13.33	0.70
		150	-13.77	0.30	-14.80	0.80	-14.10	0.10	-14.17	0.50
	2	50	-13.93	0.20	-14.33	0.60	-13.27	0.80	-13.53	0.50
		100	-13.47	0.80	-14.33	0.40	-13.87	0.20	-13.27	0.80
		150	-13.87	0.20	-14.80	0.80	-14.40	0.40	-14.17	0.50
	5	50	-14.00	0.00	-14.00	0.00	-13.50	1.00	-13.00	2.00
		100	-13.33	1.00	-14.50	0.50	-14.00	0.00	-13.17	1.00
		150	-13.67	0.50	-14.50	0.50	-14.00	0.00	-14.17	0.50
-15	1	50	-14.77	0.60	-15.07	0.40	-14.40	0.90	-13.63	1.50
		100	-14.77	0.70	-15.57	0.60	-15.17	0.20	-14.53	0.80
		150	-14.43	0.80	-15.83	0.90	-15.20	0.20	-14.97	0.10
	2	50	-14.80	0.60	-15.13	0.40	-14.70	0.50	-13.57	1.50
		100	-14.73	0.80	-15.57	0.60	-15.13	0.20	-14.53	0.80
		150	-14.47	0.80	-15.67	0.80	-15.20	0.20	-15.00	0.00
	5	50	-14.83	0.50	-14.83	0.50	-14.83	0.50	-13.83	1.50
		100	-14.83	0.50	-15.33	0.50	-14.67	0.50	-14.33	1.50
		150	-14.50	1.00	-15.67	1.00	-15.17	0.50	-15.00	0.00

A.1.3 Feinauflösung

Jede Messkurve wurde mit einer Punktmenge von 5000 Punkten aufgezeichnet und mit der Mustererkennung (Abschnitt 10) analysiert. Für die unterschiedlichen Längen der LSB-Periode der verschiedenen Musterfaktoren k wurden folgende Abtastfrequenzen F_{Abt} verwendet: $k = 0.25 \mid F_{Abt} = 12.5 \text{ kHz}$; $k = 0.50 \mid F_{Abt} = 12.5 \text{ kHz}$; $k = 2.00 \mid F_{Abt} = 5.0 \text{ kHz}$; $k = 4.00 \mid F_{Abt} = 2.5 \text{ kHz}$.

Tabelle A.3: Feinauflösung für $-2 \text{ cm} \leq \Delta s_E \leq 2 \text{ cm}$ mit Schrittweite 2 mm.

$k = f_s/f_m$			0.25		0.50		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	p [mm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
-2.0	0.5	50	-2.61	0.75	-2.20	0.20	-1.66	0.41	-1.39	0.81
		100	-1.97	0.03	-1.95	0.05	-1.53	0.60	-1.23	0.80
		150	-2.12	0.28	-2.27	0.27	-1.93	0.07	-1.40	0.67
	1.0	50	-2.58	0.75	-2.16	0.20	-1.66	0.41	-1.43	1.21
		100	-1.97	0.03	-1.95	0.05	-1.86	0.20	-1.23	0.80
		150	-2.12	0.28	-2.27	0.27	-1.86	0.27	-1.53	0.47
		50	-2.55	0.75	-2.23	0.30	-1.66	0.41	-1.39	1.21

$k = f_s/f_m$			0.25		0.50		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	p [mm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
	2.0	100	-2.01	0.13	-1.95	0.05	-1.83	0.30	-1.16	0.90
		150	-2.18	0.38	-2.37	0.37	-1.86	0.27	-1.53	0.47
-1.8	0.5	50	-2.71	1.15	-2.16	0.40	-1.46	0.61	-0.99	1.01
		100	-1.74	0.23	-2.01	0.25	-1.36	0.50	-1.16	0.80
		150	-2.08	0.28	-2.27	0.47	-1.83	0.03	-1.20	0.67
	1.0	50	-2.68	1.15	-2.10	0.40	-1.59	0.21	-0.89	1.01
		100	-1.67	0.33	-1.85	0.25	-1.53	0.50	-1.13	0.80
		150	-2.08	0.28	-1.97	0.17	-1.73	0.17	-1.23	0.77
	2.0	50	-2.68	1.15	-2.16	0.50	-1.59	0.21	-0.53	1.80
		100	-1.67	0.33	-1.68	0.25	-1.43	0.70	-1.10	0.90
		150	-2.18	0.38	-1.97	0.17	-1.93	0.13	-1.40	0.47
		50	-2.75	1.35	-1.73	0.60	-1.26	0.41	-0.40	1.60
		100	-1.54	0.13	-1.65	0.15	-1.40	0.20	-1.03	0.60
		150	-2.08	0.48	-1.93	0.37	-1.50	0.17	-1.20	0.47
-1.6	0.5	50	-2.71	1.35	-2.00	0.60	-1.36	0.71	-0.53	1.60
		100	-1.51	0.13	-1.58	0.15	-1.03	0.70	-0.93	0.70
		150	-2.08	0.48	-1.93	0.37	-1.56	0.17	-1.03	0.67
	1.0	50	-2.75	1.35	-1.70	0.50	-1.66	0.19	-0.53	1.60
		100	-1.47	0.13	-1.75	0.15	-1.03	0.70	-0.90	0.70
		150	-2.18	0.58	-1.90	0.37	-1.40	0.27	-1.00	0.67
	2.0	50	-2.18	1.55	-1.40	0.20	-1.19	0.21	0.13	1.60
		100	-1.47	0.07	-1.55	0.15	-0.90	0.50	-0.07	1.90
		150	-1.98	0.68	-1.67	0.27	-1.33	0.07	-1.00	0.47
	1.0	50	-2.18	1.55	-1.36	0.10	-1.53	0.19	0.17	2.60
		100	-1.47	0.07	-1.48	0.15	-0.90	0.50	0.53	2.00
		150	-1.98	0.68	-1.67	0.27	-1.33	0.07	-0.93	0.47
-1.4	0.5	50	-2.15	1.55	-1.36	0.10	-1.53	0.19	0.14	2.60
		100	-1.47	0.07	-1.41	0.15	-0.90	0.50	0.47	2.00
		150	-1.85	0.78	-1.83	0.57	-1.33	0.07	-0.93	0.47
	1.0	50	-2.08	1.05	-1.33	0.20	-1.19	0.01	0.00	1.20
		100	-1.47	0.27	-1.15	0.05	-0.93	0.30	0.37	1.70
		150	-1.62	0.48	-1.67	0.47	-1.13	0.17	-0.93	0.27
	2.0	50	-2.08	1.05	-1.26	0.10	-1.53	0.39	-0.79	0.41
		100	-1.41	0.27	-1.15	0.05	-0.90	0.30	0.37	1.70
		150	-1.62	0.48	-1.37	0.17	-1.20	0.13	-0.93	0.27
	1.0	50	-2.01	0.95	-1.23	0.10	-1.53	0.39	-0.79	0.41
		100	-1.34	0.27	-1.15	0.05	-0.90	0.30	0.33	1.60
		150	-1.52	0.38	-1.37	0.17	-1.20	0.13	-0.93	0.27
-1.2	0.5	50	-2.05	1.35	-1.30	0.30	-1.19	0.19	0.13	1.20
		100	-1.37	0.47	-1.15	0.15	-0.93	0.10	0.27	1.30
		150	-1.42	0.78	-1.37	0.37	-1.03	0.03	0.07	1.10
	1.0	50	-2.05	1.35	-1.23	0.30	-1.46	0.59	0.40	2.00
		100	-1.37	0.47	-1.15	0.15	-0.90	0.10	0.27	1.30
-1.0	0.5	50	-2.05	1.35	-1.30	0.30	-1.19	0.19	0.13	1.20
		100	-1.37	0.47	-1.15	0.15	-0.93	0.10	0.27	1.30
		150	-1.42	0.78	-1.37	0.37	-1.03	0.03	0.07	1.10
	1.0	50	-2.05	1.35	-1.23	0.30	-1.46	0.59	0.40	2.00
		100	-1.37	0.47	-1.15	0.15	-0.90	0.10	0.27	1.30

$k = f_s/f_m$			0.25		0.50		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	p [mm]	f_{T_g} [MHz]	$\overline{\Delta s_M}$ [cm]	δe [cm]	$\overline{\Delta s_M}$ [cm]	δe [cm]	$\overline{\Delta s_M}$ [cm]	δe [cm]	$\overline{\Delta s_M}$ [cm]	δe [cm]
	2.0	150	-1.38	0.68	-1.37	0.37	-1.06	0.13	0.20	1.40
		50	-2.01	1.35	-1.16	0.30	-1.46	0.59	0.73	2.20
		100	-1.34	0.47	-1.15	0.15	-0.90	0.10	0.33	1.40
		150	-1.45	0.78	-1.37	0.37	-1.06	0.13	0.20	1.40
-0.8	0.5	50	-1.55	0.95	-1.26	0.50	-1.03	0.39	0.00	0.80
		100	-1.17	0.57	-1.01	0.35	-0.30	0.80	0.40	1.30
		150	-1.42	0.78	-1.07	0.27	-1.03	0.23	0.00	0.80
	1.0	50	-1.48	0.85	-1.23	0.50	-0.23	0.90	0.40	1.80
		100	-1.17	0.57	-1.01	0.35	-0.30	0.80	0.40	1.30
		150	-1.35	0.68	-1.07	0.27	-0.93	0.13	0.13	1.00
	2.0	50	-1.55	0.95	-1.16	0.50	-0.79	0.80	0.40	1.80
		100	-1.14	0.47	-1.01	0.35	-0.30	0.80	0.33	1.20
		150	-1.38	0.78	-1.37	0.57	-0.93	0.13	0.13	1.00
-0.6	0.5	50	-0.98	0.45	-1.16	0.70	0.13	0.90	0.07	0.80
		100	-0.87	0.47	-0.95	0.35	0.00	0.60	0.53	1.20
		150	-1.12	0.78	-1.03	0.47	-1.03	0.43	0.03	0.70
	1.0	50	-0.95	0.35	-1.13	0.70	0.07	0.70	0.70	1.60
		100	-0.87	0.47	-0.95	0.35	0.00	0.60	0.53	1.20
		150	-1.12	0.78	-1.03	0.47	0.00	0.60	0.07	0.80
	2.0	50	-0.95	0.35	-1.10	0.70	0.00	0.60	1.07	1.80
		100	-0.87	0.47	-0.95	0.35	0.00	0.60	0.47	1.20
		150	-1.12	0.78	-1.10	0.77	0.00	0.60	0.07	0.80
-0.4	0.5	50	-0.95	0.55	-1.16	0.90	0.30	0.70	0.00	0.40
		100	-0.57	0.27	-0.70	0.75	0.27	0.80	0.53	1.00
		150	-0.98	0.58	-1.07	0.67	0.00	0.40	0.30	1.00
	1.0	50	-0.95	0.55	-1.13	0.90	0.33	1.20	0.93	1.40
		100	-0.57	0.27	-0.28	0.65	0.27	0.80	0.53	1.00
		150	-0.98	0.58	-1.03	0.67	0.00	0.40	0.27	0.80
	2.0	50	-0.95	0.55	-1.10	0.90	0.27	1.20	0.93	1.40
		100	-0.54	0.27	-0.25	0.60	0.27	0.80	0.47	1.00
		150	-0.98	0.58	-0.97	0.57	0.00	0.40	0.27	0.80
-0.2	0.5	50	-0.95	0.75	-0.60	1.10	0.23	0.50	0.47	1.20
		100	-0.51	0.37	0.07	0.40	0.40	0.60	0.53	0.80
		150	-0.66	0.78	-0.97	0.77	0.07	0.30	0.53	0.80
	1.0	50	-0.95	0.75	-1.13	1.10	0.27	0.80	1.13	1.40
		100	-0.47	0.27	0.07	0.40	0.40	0.60	0.53	0.80
		150	-0.66	0.78	-0.97	0.77	0.13	0.40	0.33	0.60
	2.0	50	-0.95	0.75	-1.10	1.10	0.47	1.00	1.13	1.40
		100	-0.47	0.27	0.07	0.40	0.40	0.60	0.47	0.80
		150	-0.66	0.78	-0.97	0.77	0.07	0.40	0.27	0.60
	0.5	50	-0.63	0.95	0.13	0.40	0.30	0.30	1.00	1.00
		100	0.00	0.00	0.13	0.20	0.37	0.40	1.40	1.40
		150	0.00	0.00	0.10	0.10	0.07	0.10	0.53	0.60

$k = f_s/f_m$			0.25		0.50		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	p [mm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
0.0	1.0	50	-0.63	0.95	0.13	0.40	0.80	0.80	1.00	1.00
		100	0.00	0.00	0.17	0.30	0.37	0.40	0.50	0.50
		150	0.00	0.00	0.07	0.20	0.10	0.10	0.73	0.90
	2.0	50	-0.63	0.95	0.13	0.40	0.80	0.80	1.00	1.00
		100	0.00	0.00	0.07	0.20	0.33	0.40	1.40	1.40
		150	0.00	0.00	0.07	0.20	0.20	0.40	0.67	0.80
0.2	0.5	50	0.00	0.20	0.30	0.20	0.23	0.10	0.87	0.80
		100	0.27	0.20	0.20	0.00	0.77	0.60	1.40	1.20
		150	0.00	0.20	0.10	0.10	0.37	0.30	0.87	0.70
	1.0	50	0.00	0.20	0.30	0.20	0.73	0.60	1.07	1.00
		100	0.27	0.20	0.23	0.10	0.37	0.20	1.40	1.20
		150	0.00	0.20	0.10	0.20	0.33	0.20	0.87	0.70
	2.0	50	0.00	0.20	0.33	0.20	0.73	0.60	1.07	1.00
		100	0.27	0.20	0.13	0.20	0.33	0.20	1.40	1.20
		150	0.00	0.20	0.07	0.20	0.33	0.20	0.80	0.60
0.4	0.5	50	0.20	0.30	0.40	0.00	0.73	0.40	1.20	0.80
		100	0.53	0.40	0.20	0.20	0.77	0.40	1.40	1.00
		150	0.17	0.40	0.10	0.30	0.67	0.60	0.97	0.70
	1.0	50	0.27	0.30	0.47	0.10	0.73	0.40	1.20	0.80
		100	0.57	0.40	0.23	0.20	0.97	0.90	1.40	1.00
		150	0.20	0.40	0.17	0.30	0.80	0.60	0.97	0.70
	2.0	50	0.27	0.20	0.53	0.20	0.73	0.40	1.20	0.80
		100	0.53	0.40	0.27	0.20	0.67	0.80	1.40	1.00
		150	0.20	0.40	0.27	0.20	0.73	0.60	1.40	1.20
0.6	0.5	50	0.67	0.90	0.30	0.50	0.77	0.20	1.00	0.40
		100	0.50	0.30	0.57	0.10	1.30	0.70	1.40	0.80
		150	0.47	0.20	0.37	0.30	0.70	0.10	1.13	0.60
	1.0	50	0.70	1.00	0.33	0.40	0.77	0.20	1.00	0.40
		100	0.53	0.20	0.57	0.10	1.30	0.70	2.07	1.80
		150	0.40	0.40	0.23	0.40	0.70	0.10	1.47	1.00
	2.0	50	0.73	1.00	0.33	0.40	0.80	0.20	1.00	0.40
		100	0.53	0.20	0.60	0.00	1.40	0.80	2.07	1.80
		150	0.40	0.40	0.27	0.40	0.60	0.00	1.47	1.00
0.8	0.5	50	0.77	0.70	0.40	0.40	1.13	0.40	1.43	1.10
		100	0.73	0.10	0.60	0.20	1.23	0.50	2.10	1.60
		150	0.50	0.30	0.43	0.40	0.97	0.20	1.40	0.80
	1.0	50	0.80	0.80	0.43	0.40	0.73	0.20	1.13	0.40
		100	0.73	0.10	0.60	0.20	1.23	0.50	2.17	1.60
		150	0.57	0.30	0.50	0.30	0.93	0.20	1.27	0.80
	2.0	50	0.80	0.80	0.47	0.40	0.73	0.20	1.13	0.40
		100	0.67	0.20	0.60	0.20	1.27	0.60	2.20	1.60
		150	0.53	0.40	0.60	0.20	0.93	0.20	1.27	0.80
		50	0.63	0.70	0.40	0.60	1.13	0.20	1.90	0.90

$k = f_s/f_m$			0.25		0.50		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	p [mm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
1.0	0.5	100	0.77	0.30	1.00	0.20	1.20	0.20	2.40	1.40
		150	0.53	0.50	0.70	0.30	1.03	0.10	1.40	0.60
	1.0	50	0.67	0.70	0.50	0.50	1.63	0.70	1.63	1.90
		100	0.77	0.30	0.87	0.30	1.20	0.20	2.40	1.40
		150	0.63	0.40	0.77	0.30	1.17	0.30	1.67	0.70
	2.0	50	0.73	0.60	0.60	0.40	0.73	0.40	1.00	0.00
		100	0.73	0.40	1.00	0.20	1.20	0.20	2.40	1.40
		150	0.60	0.40	0.73	0.40	1.07	0.20	1.73	0.80
1.2	0.5	50	1.07	0.30	0.50	0.80	1.07	0.20	2.03	0.90
		100	0.83	0.50	1.10	0.10	1.60	0.50	2.40	1.20
		150	0.60	0.70	1.00	0.20	1.27	0.20	1.77	0.70
	1.0	50	1.10	0.30	0.53	0.80	1.40	0.30	1.77	1.70
		100	0.83	0.50	1.10	0.10	1.27	0.20	2.40	1.20
		150	0.60	0.70	1.00	0.20	1.17	0.10	1.67	0.60
	2.0	50	1.20	0.20	0.80	0.80	1.13	0.60	1.13	0.20
		100	0.80	0.60	1.00	0.20	1.27	0.20	2.40	1.20
		150	0.53	0.80	1.00	0.20	1.47	0.40	1.67	0.60
1.4	0.5	50	1.43	0.10	1.23	0.30	1.33	0.40	2.03	0.70
		100	0.87	0.70	1.10	0.30	1.73	0.40	2.50	1.10
		150	1.00	0.50	1.00	0.40	1.63	0.30	1.93	0.60
	1.0	50	1.47	0.20	1.27	0.30	1.50	0.10	1.77	1.50
		100	0.87	0.70	1.43	0.30	1.73	0.40	2.50	1.10
		150	1.07	0.50	1.03	0.40	1.63	0.30	1.87	0.60
	2.0	50	1.40	0.20	1.27	0.20	1.27	0.80	1.73	1.40
		100	0.87	0.80	1.53	0.20	1.87	0.60	2.60	1.20
		150	1.07	0.40	1.13	0.40	1.67	0.40	1.87	0.60
1.6	0.5	50	1.50	0.10	1.30	0.30	1.50	0.10	2.30	1.30
		100	1.03	0.90	1.50	0.20	1.83	0.50	2.47	0.90
		150	1.33	0.40	1.30	0.30	1.77	0.30	2.30	0.70
	1.0	50	1.57	0.10	1.37	0.30	1.50	0.10	2.90	1.50
		100	1.37	0.60	1.57	0.10	2.17	0.60	2.47	0.90
		150	1.43	0.30	1.37	0.30	1.77	0.30	2.30	0.70
	2.0	50	1.53	0.20	1.33	0.40	1.60	0.00	2.80	1.40
		100	1.40	0.60	1.73	0.40	2.20	0.60	2.53	1.00
		150	1.40	0.40	1.47	0.20	1.73	0.20	2.40	0.80
1.8	0.5	50	1.50	0.30	1.30	0.50	1.90	0.10	2.10	0.30
		100	1.57	0.40	1.50	0.30	2.17	0.40	2.50	0.70
		150	1.50	0.30	1.60	0.20	1.90	0.20	2.40	0.60
	1.0	50	1.60	0.20	1.33	0.50	1.63	0.30	3.10	1.30
		100	1.57	0.40	1.67	0.30	2.17	0.40	2.50	0.70
		150	1.57	0.30	1.67	0.20	1.93	0.20	2.67	1.00
	2.0	50	1.60	0.20	1.27	0.60	2.13	0.60	3.00	1.20
		100	1.53	0.40	2.00	0.20	2.20	0.40	2.60	0.80

$k = f_s/f_m$			0.25		0.50		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	p [mm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
		150	1.53	0.40	1.47	0.40	2.13	0.40	2.67	1.00
2.0	0.5	50	1.50	0.50	1.30	0.70	1.97	0.10	3.03	1.10
		100	2.07	0.30	2.00	0.00	2.30	0.40	2.60	0.80
		150	1.50	0.50	1.70	0.40	2.07	0.10	2.50	0.50
	1.0	50	1.53	0.50	1.37	0.70	2.23	0.40	3.03	1.10
		100	2.13	0.30	1.93	0.40	2.23	0.30	2.60	0.80
		150	1.50	0.50	1.70	0.30	2.03	0.10	2.50	0.90
	2.0	50	1.47	0.60	1.33	0.80	2.27	0.40	2.93	1.00
		100	2.13	0.40	1.67	0.40	2.27	0.40	2.67	0.80
		150	1.40	0.60	2.00	0.00	2.00	0.00	3.00	1.00

A.2 Fourier-Analyse

A.2.1 Interferenzpunktverschiebung in Richtung Signalquelle 1

Jede Messkurve wurde mit einer Punktmenge von 5000 Punkten aufgezeichnet. Für die unterschiedlichen Längen der LSB-Periode der verschiedenen Musterfaktoren k wurden folgende Abtastfrequenzen F_{Abt} verwendet: $k = 2.00 \mid F_{Abt} = 5.0 \text{ kHz}$; $k = 4.00 \mid F_{Abt} = 2.5 \text{ kHz}$.

Tabelle A.4: Verschiebung des Interferenzpunkts in Richtung Signalquelle 1.

$k = f_s/f_m$		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
0	50	0.34	0.38	0.89	1.02
	100	0.47	0.49	0.97	1.19
	150	0.29	0.31	0.83	0.84
1	50	1.25	0.26	1.79	1.03
	100	1.48	0.54	1.97	1.03
	150	1.29	0.31	1.74	0.85
2	50	2.12	0.28	2.93	1.12
	100	2.45	0.54	3.03	1.10
	150	2.31	0.34	2.79	0.83
3	50	3.05	0.25	3.64	0.82
	100	3.42	0.45	4.01	1.05
	150	3.27	0.28	3.78	0.82
4	50	4.03	0.19	4.76	0.98
	100	4.45	0.50	4.96	1.08
	150	4.27	0.31	4.63	0.71
5	50	5.01	0.04	5.98	1.34
	100	5.40	0.43	5.84	0.86

$k = f_s/f_m$		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
	150	5.25	0.27	5.70	0.75
6	50	5.80	0.20	6.37	0.65
	100	6.35	0.36	7.01	1.04
	150	6.21	0.25	6.56	0.66
	150	6.21	0.25	6.56	0.66
7	50	6.91	0.14	7.53	1.04
	100	7.40	0.46	7.82	1.00
	150	7.20	0.22	7.53	0.65
	150	7.20	0.22	7.53	0.65
8	50	7.99	0.06	8.25	0.44
	100	8.38	0.44	8.83	0.98
	150	8.17	0.23	8.54	0.64
	150	8.17	0.23	8.54	0.64
9	50	8.86	0.18	9.42	0.63
	100	9.46	0.47	9.84	0.93
	150	9.16	0.20	9.47	0.56
	150	9.16	0.20	9.47	0.56
10	50	9.75	0.30	10.35	0.86
	100	10.42	0.49	10.77	0.84
	150	10.09	0.11	10.48	0.62
	150	10.09	0.11	10.48	0.62
11	50	10.81	0.26	11.32	0.47
	100	11.40	0.44	11.85	0.93
	150	11.07	0.09	11.50	0.58
	150	11.07	0.09	11.50	0.58
12	50	11.77	0.47	12.11	0.21
	100	12.36	0.39	12.85	0.93
	150	12.06	0.06	12.42	0.48
	150	12.06	0.06	12.42	0.48
13	50	12.71	0.38	12.98	0.44
	100	13.45	0.47	13.64	0.87
	150	13.06	0.11	13.32	0.38
	150	13.06	0.11	13.32	0.38
14	50	13.60	0.46	14.00	0.06
	100	14.37	0.43	14.81	0.93
	150	14.02	0.07	14.43	0.49
	150	14.02	0.07	14.43	0.49
15	50	14.49	0.76	14.69	0.34
	100	15.28	0.31	15.64	0.77
	150	14.93	0.12	15.32	0.41
	150	14.93	0.12	15.32	0.41

A.2.2 Interferenzpunktverschiebung in Richtung Signalquelle 2

Jede Messkurve wurde mit einer Punktmenge von 5000 Punkten aufgezeichnet. Für die unterschiedlichen Längen der LSB-Periode der verschiedenen Musterfaktoren k wurden folgende Abtastfrequenzen F_{Abt} verwendet: $k = 2.00 \mid F_{Abt} = 5.0 \text{ kHz}$; $k = 4.00 \mid F_{Abt} = 2.5 \text{ kHz}$.

Tabelle A.5: Verschiebung des Interferenzpunkts in Richtung Signalquelle 2.

$k = f_s/f_m$		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
0	50	0.28	0.38	0.68	0.97
	100	0.39	0.45	0.96	1.11
	150	0.30	0.32	0.83	0.86
-1	50	0.77	0.41	0.32	0.83
	100	0.50	0.54	0.12	0.93
	150	0.72	0.33	0.20	0.87
-2	50	1.77	0.28	1.20	1.02
	100	1.56	0.48	1.01	1.16
	150	1.69	0.34	1.15	0.89
-3	50	2.63	0.51	1.98	1.25
	100	2.54	0.53	2.03	1.07
	150	2.68	0.34	2.17	0.88
-4	50	3.49	0.63	3.12	1.14
	100	3.45	0.60	2.93	1.20
	150	3.65	0.42	3.12	1.02
-5	50	4.59	0.48	3.89	1.21
	100	4.50	0.54	3.94	1.17
	150	4.66	0.41	4.01	1.04
-6	50	5.61	0.40	4.69	1.61
	100	5.52	0.51	4.88	1.12
	150	5.66	0.38	5.04	1.01
-7	50	6.38	0.72	5.95	1.35
	100	6.44	0.58	5.81	1.23
	150	6.66	0.38	6.15	0.88
-8	50	7.38	0.67	6.71	1.43
	100	7.48	0.57	6.82	1.31
	150	7.61	0.42	6.98	1.06
-9	50	8.45	0.58	7.67	1.56
	100	8.53	0.48	7.77	1.40
	150	8.58	0.44	7.97	1.04
-10	50	9.37	0.77	8.74	1.35
	100	9.59	0.53	8.81	1.31
	150	9.56	0.45	9.11	0.99
-11	50	10.31	0.79	9.49	1.73
	100	10.49	0.52	9.85	1.29
	150	10.49	0.57	9.97	1.11
-12	50	11.05	1.13	10.80	1.27
	100	11.41	0.65	10.85	1.25
	150	11.50	0.55	10.96	1.17
-13	50	12.24	0.91	11.71	1.39
	100	12.44	0.62	11.72	1.40

$k = f_s/f_m$		2.00		4.00	
Δs_E [cm]	f_{T_g} [MHz]	Δs_M [cm]	δe [cm]	Δs_M [cm]	δe [cm]
	150	12.50	0.54	11.94	1.13
-14	50	13.24	0.82	12.51	1.70
	100	13.39	0.66	12.72	1.39
	150	13.48	0.55	12.85	1.18
-15	50	14.11	1.03	13.33	1.95
	100	14.34	0.70	13.64	1.46
	150	14.48	0.56	13.97	1.06

A.3 Normierte Distanzunterschiede der Mustererkennung

Die normierten Distanzunterschiede $\Delta s_M / \Delta s_E$ der Mustererkennung mit den größten positiven und negativen Abweichungen aus Abschnitt 10.2.1.

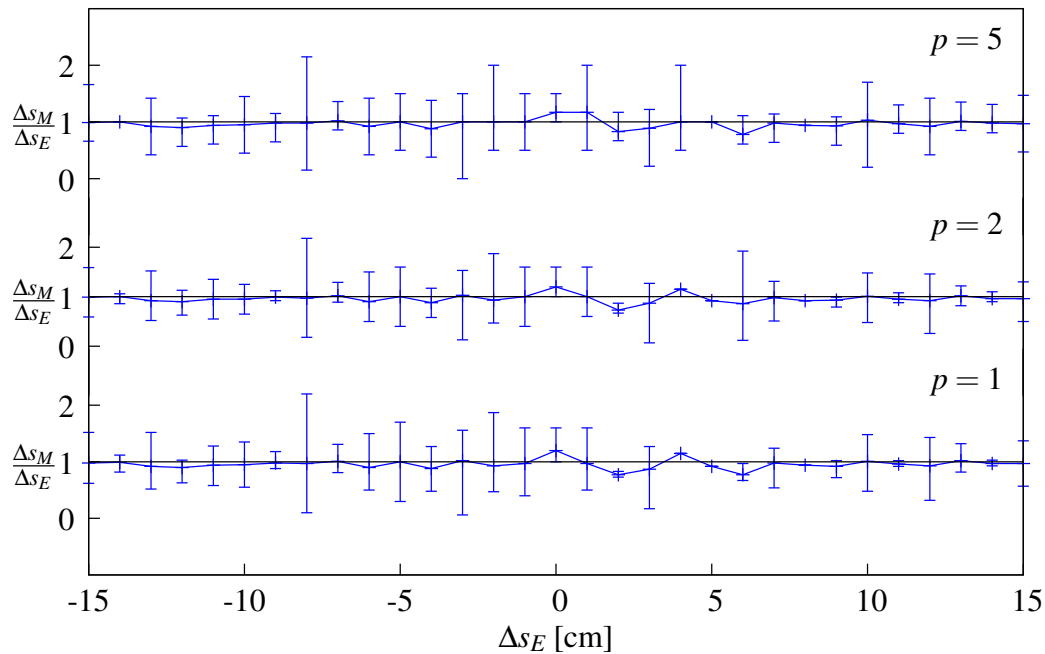


Abbildung A.1: $f_{T_g} = 50$ MHz, $k = 0.25$

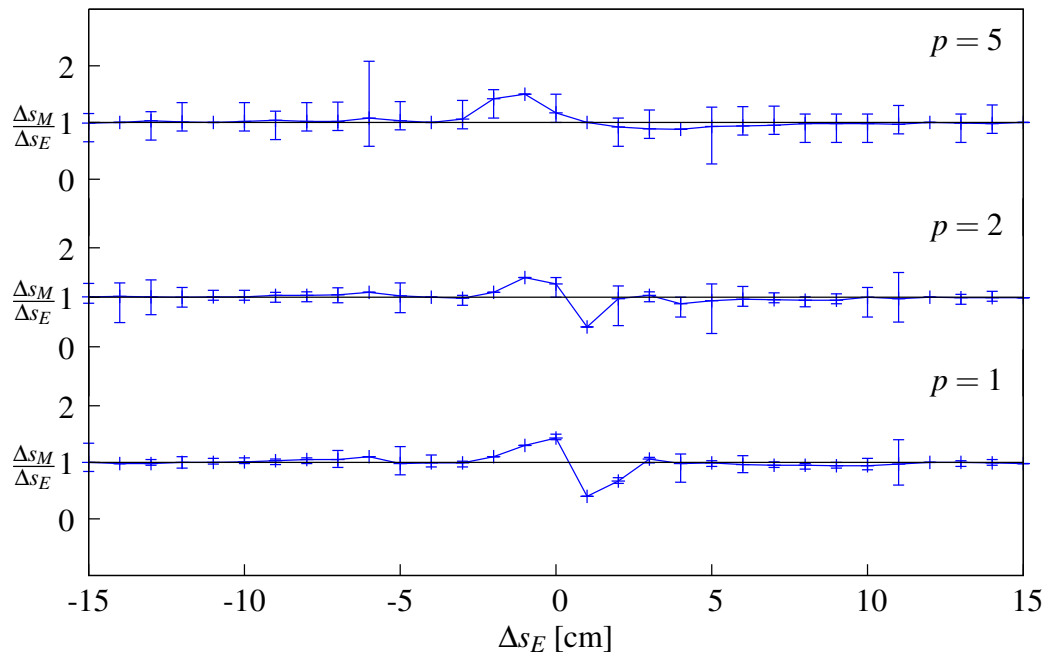
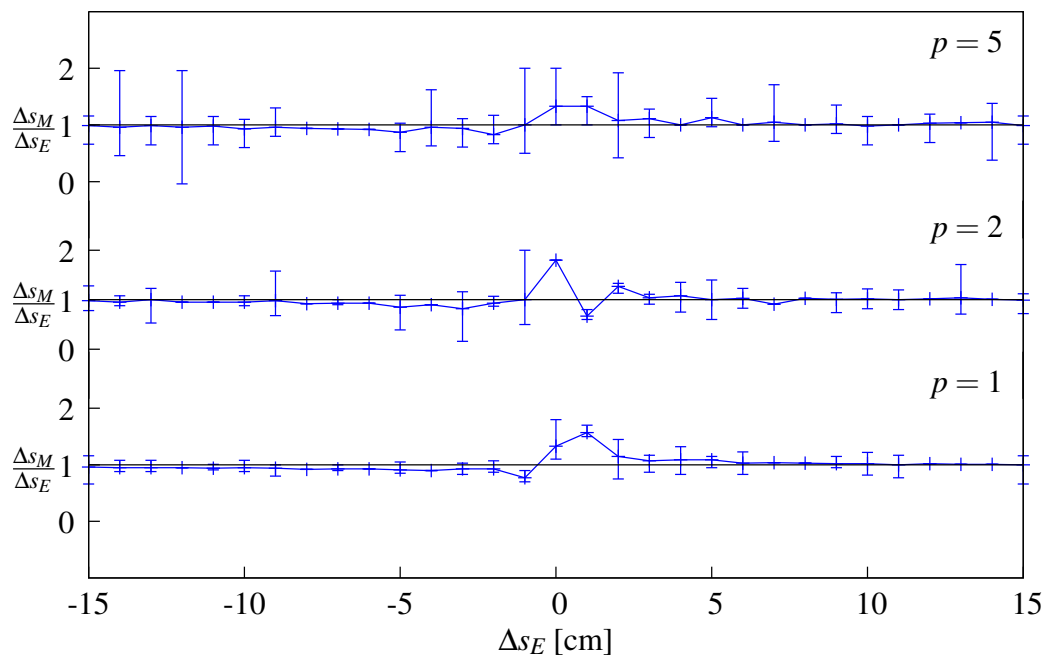
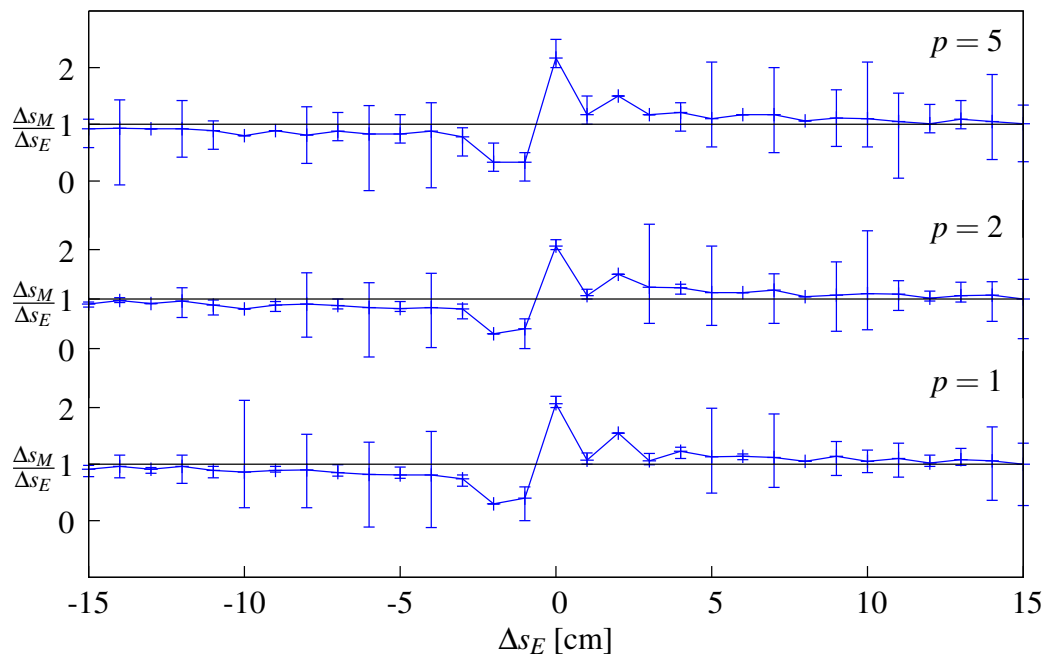
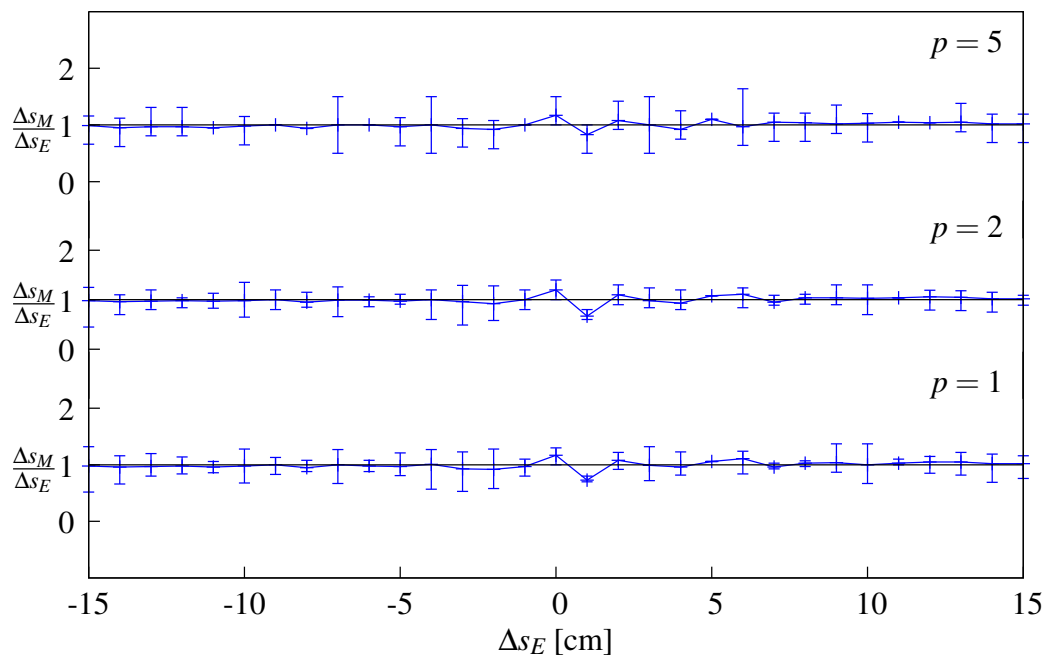
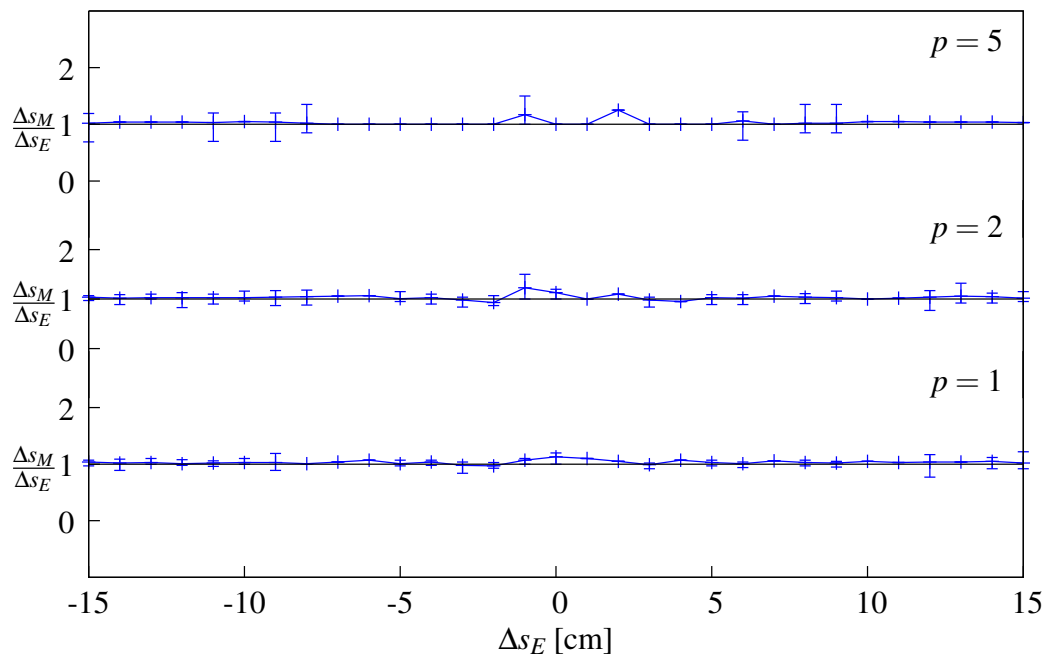


Abbildung A.2: $f_{T_g} = 50$ MHz, $k = 0.50$

Abbildung A.3: $f_{T_g} = 50$ MHz, $k = 2.00$.Abbildung A.4: $f_{T_g} = 50$ MHz, $k = 4.00$.

Abbildung A.5: $f_{T_g} = 100$ MHz, $k = 0.25$ Abbildung A.6: $f_{T_g} = 100$ MHz, $k = 0.50$

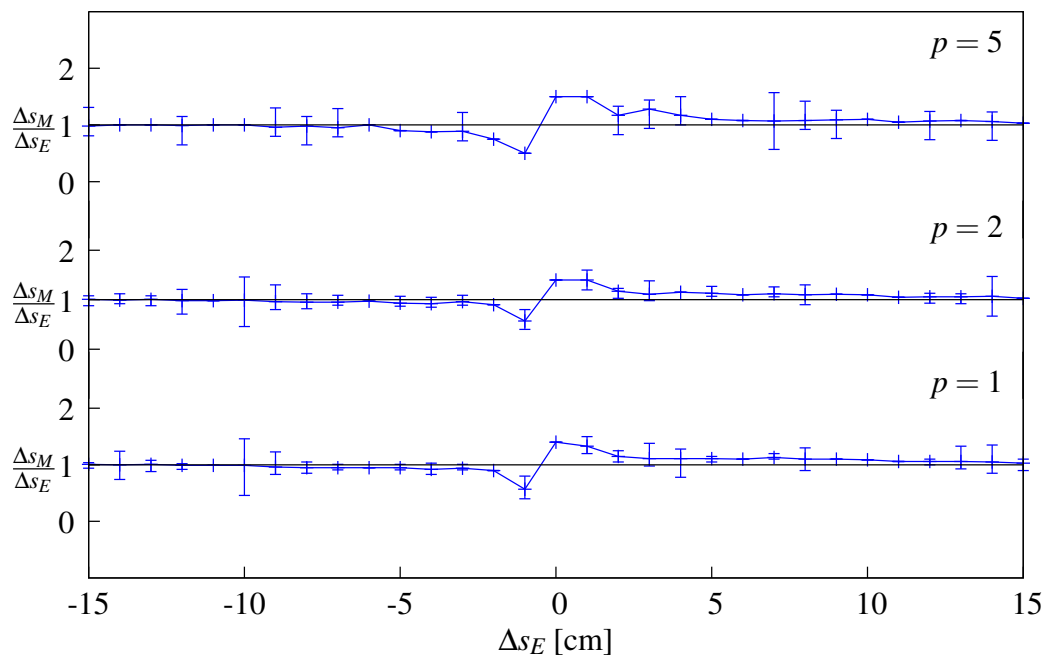


Abbildung A.7: $f_{T_g} = 100$ MHz, $k = 2.00$.

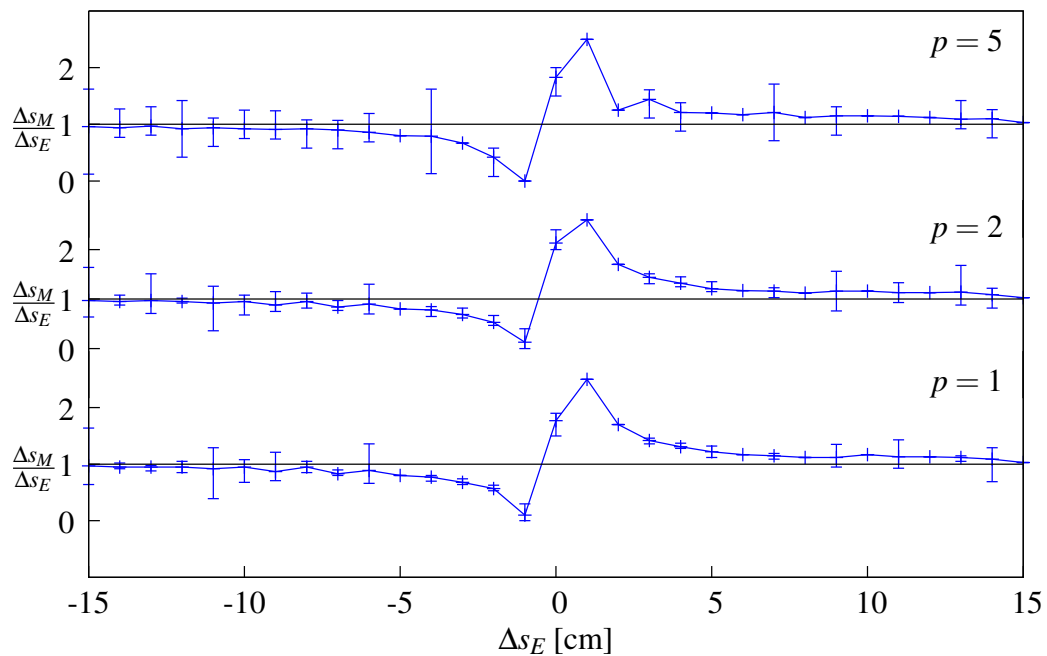
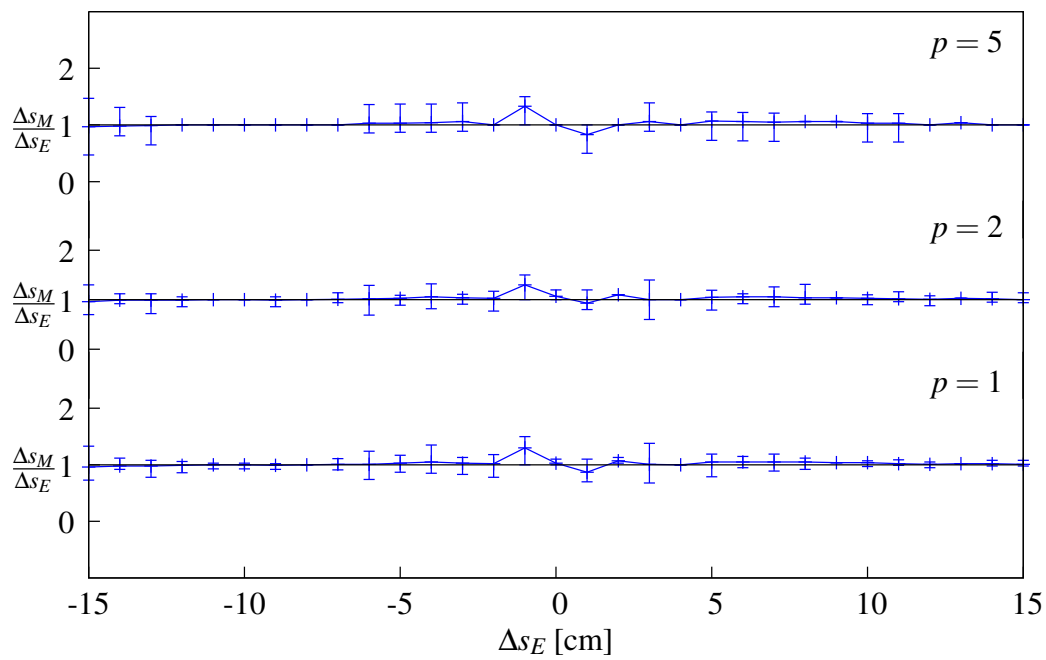
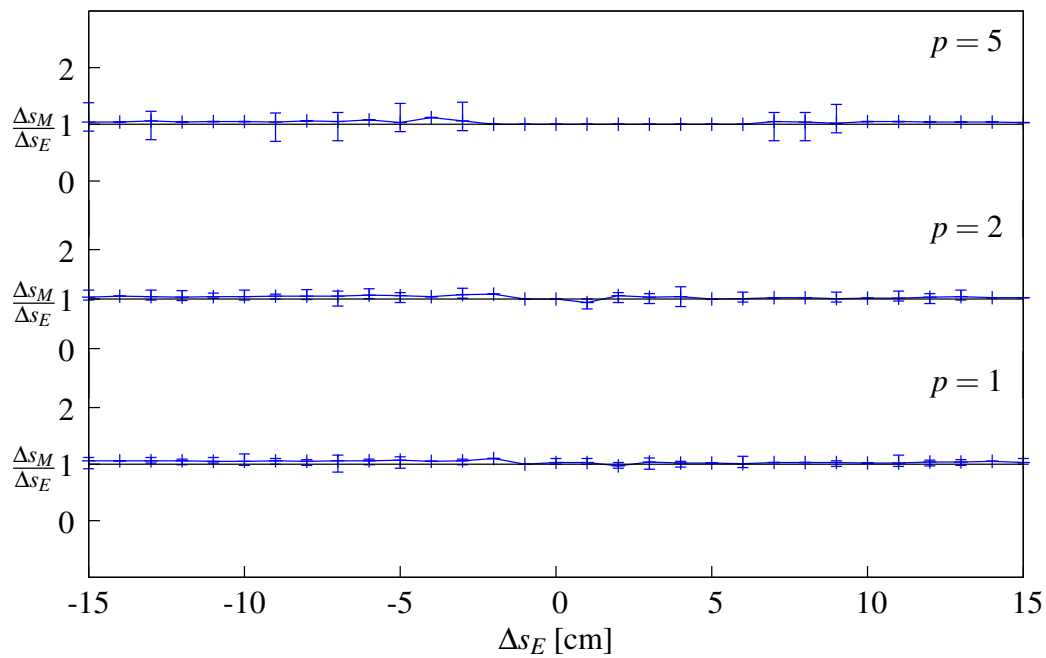
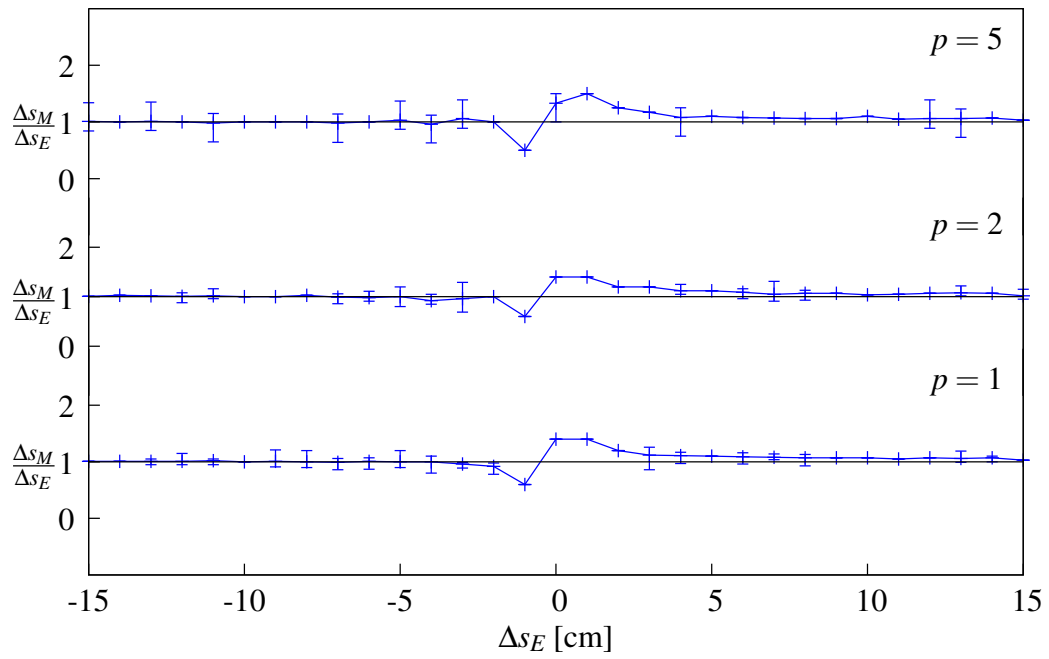
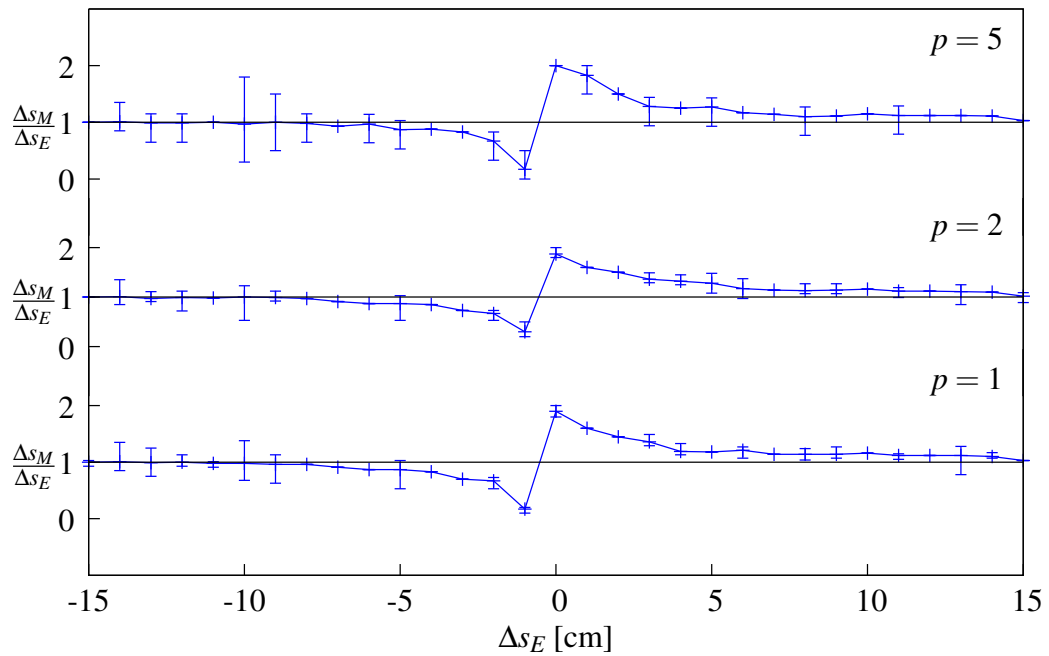


Abbildung A.8: $f_{T_g} = 100$ MHz, $k = 4.00$.

Abbildung A.9: $f_{T_g} = 150$ MHz, $k = 0.25$ Abbildung A.10: $f_{T_g} = 150$ MHz, $k = 0.50$

Abbildung A.11: $f_{T_g} = 150$ MHz, $k = 2.00$.Abbildung A.12: $f_{T_g} = 150$ MHz, $k = 4.00$.

Thesen

1. Die Distanzmessung zwischen zwei oder mehreren Referenzpunkten ist eine grundlegende Möglichkeit der Lokalisierung eines Betrachtungspunktes.
2. Distanzmessverfahren unterliegen oft der Forderung nach einer hohen Messauflösung und einer hohen Messgenauigkeit im Kontext einer sparsamen Ressourcennutzung und einer einfachen technologischen Lösung. Weiterhin wird von den Verfahren erwartet, dass sie über einen weiten Bereich von wenigen Millimeter bis hin zu mehreren Kilometern einsetzbar sind.
3. Viele der bestehenden Verfahren zur Messung von Distanzunterschieden mit Auflösungen im Zentimeter- und Millimeterbereich erreichen dies nur unter erheblichem Ressourcen- und Kostenbedarf.
4. Das neu vorgestellte Messverfahren der LSB-Methode basiert auf der Superposition von parametrisierten Schwebungen zweier Signalquellen und ermöglicht dadurch die Messung des Distanzunterschieds zwischen zwei Referenzpunkten zu einem Betrachtungspunkt im Millimeterbereich bei geringem Ressourcenbedarf.
5. Die LSB-Methode kombiniert zwei Vorteile: zum einen den Vorteil eines hochfrequenten Trägers zur Erzielung von Messauflösungen im Millimeterbereich und zum anderen den Vorteil eines niederfrequenten Signals für eine einfache technische Auswertung. Die Auswertungseinheit ist hauptsächlich durch die Verwendung von Analog-Digital-Wandlern mit Abtastfrequenzen von einigen wenigen Kilohertz sehr ressourcenschonend aufbaubar.
6. Die Umsetzung der Phasenverschiebung des hochfrequenten Trägersignals zum niederfrequenten Analysesignal erfolgt über die Hüllkurve des sich durch die Superposition ausbildende Interferenzsignal der beiden parametrisierten Schwebungssignale. Dabei wirkt sich die Parametrierung der Schwebungssignale unterschiedlich funktional auf die Hüllkurve und somit auch auf die Auswertung aus.
7. Die LSB-Methode ermöglicht die Distanzmessung mit unterschiedlichen hochfrequenten Trägerfrequenzen durch ein und dieselbe niederfrequente Analysefrequenz. Damit

ist es möglich die selbe Auswertungseinheit für jede beliebige hochfrequente Trägerfrequenz zu nutzen. Lediglich die Signalempfangseinheit muss an die Trägerfrequenz angepasst sein.

8. Derzeit ist die LSB-Methode ausschließlich in der Lage, den Distanzunterschied zwischen zwei Referenzpunkten zum Betrachtungspunkt nur innerhalb einer Wellenlänge der Trägerfrequenz zu bestimmen.
9. Die LSB-Methode benötigt keine additional Synchronisation zwischen den Referenzpunkten und dem Betrachtungspunkt. Die Synchronisationsinformationen sind mit in die parametrisierten Schwebungssignale der Referenzpunkte eingebettet.
10. Die Mustererkennung ist ein sehr ressourcenschonendes Berechnungsverfahren für die LSB-Methode. Sie ermöglicht die Bestimmung des Distanzunterschieds anhand weniger Stützpunkte. Für eine feste Parametrierung der Schwebungssignale der Referenzpunkte können die Stützpunkte für eine Schar von Distanzunterschieden vorausberechnet werden und müssen lediglich während der Analysephase mit den entsprechenden korrespondierenden Punkten des Messsignals verglichen werden.
11. Das Berechnungsverfahren Fourier-Analyse benötigt einen höheren Ressourcenbedarf als die Mustererkennung, berechnet aber den Distanzunterschied direkt aus dem vorliegenden Messsignal und kann sich somit flexibler auf sich eventuell ändernde Parametrierungen der Schwebungssignale der Referenzpunkte einstellen.
12. Gegenüber der Störung durch Amplitudendiskrepanz weisen beide Berechnungsverfahren eine hohe Toleranz und Kompensation auf. Die Fourier-Analyse liefert noch bei einem Signalabstand von 20 dB korrekte Ergebnisse.
13. Gegenüber der Störung durch Rauschen weisen beide Berechnungsverfahren nur eine eingeschränkte Toleranz auf. Aber auf Grund der sehr schmalbandigen Eigenschaft der Schwebungssignale können Rauschstörungen mittels schmaler Bandpassfilter hoher Güte hinreichend gut gefiltert werden.
14. Die LSB-Methode ermöglicht mit den in der Arbeit verwendeten Mess- und Analyseverfahren die Bestimmung des Distanzunterschieds mit einem maximalen Fehler von $\pm 1^\circ$ Phasenverschiebung in Bezug der verwendeten Trägerfrequenz.
15. Die LSB-Methode hat das Potential, unter Lösung verschiedener charakteristischer Probleme von Funkübertragungssystemen, ein alternatives Messverfahren für Lokalisierungssysteme im Bereich des Ubiquitous Computing zu sein.

Zusammenfassung

Die Lokalisierung in seiner mannigfaltigen Ausprägung zur Ortsbestimmung von Menschen und Objekten oder im allgemeinen von dedizierten Betrachtungspunkten auf einer Geraden, in der Ebene oder im Raum, nimmt einen immer stärker werdenden Stellenwert in unserem täglichen Leben ein. Lokalisierung, also die Bestimmung eines Ortes, beruht im Allgemeinen auf der Messung von verschiedenen Distanzen zwischen bekannten Referenzpunkten und dem Ort des Betrachtungspunkts.

In der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene publizierte Lokalisierungssysteme und Verfahren zur Distanzmessung untersucht und beschrieben. Mit der *Localization by Superposing Beats* (LSB) Methode wird ein neuer Ansatz untersucht, welcher die Vorteile von hochfrequenten Signalen zur Messung von Distanzunterschieden in einem elektrischen Leiter mit einer Auflösung im Zentimeter- und sogar Millimeterbereich mit der sehr einfachen und ressourcensparenden Auswertung von niederfrequenten Signalen kombiniert. Die LSB-Methode beruht auf der Überlagerung speziell parametrierter Schwebungssignale. Aus dem sich am Betrachtungspunkt ausbildenden Interferenzsignal wird ein niederfrequentes Analysesignal gewonnen, das für die Bestimmung von Distanzunterschieden zwischen zwei Signalquellen und dem Betrachtungspunkt verwendet wird. Das hochfrequente Trägersignal der Schwebung bestimmt die erzielbare Auflösung und die Parametrierung der Schwebungssignale ermöglicht die Bestimmung des Distanzunterschieds durch ein und dasselbe niederfrequente Analysesignal für ein weites Spektrum an hochfrequenten Trägerfrequenzen, vorzugsweise ab einigen hundert Mega-Hertz aufwärts. Der Distanzunterschied ist dabei *direkt* aus dem niederfrequenten Analysesignal ablesbar. Zudem werden keine zusätzlichen Synchronisationsmechanismen zwischen den Signalquellen und dem Betrachtungspunkt benötigt. Die Synchronisation ist mit in die parametrierte Schwebung eingebettet.

Der Kern der Arbeit untersucht die LSB-Methode theoretischen näher und evaluiert anhand erster einfacher Experimente die gewonnenen theoretischen Erkenntnisse. Es werden weiterhin zwei Verfahren für die Bestimmung des Distanzunterschieds beschrieben. Das erste Verfahren beruht auf der Wiedererkennung von ortsabhängigen Mustern und das zweite Verfahren auf der Fourier-Analyse des niederfrequenten Analysesignals. Abgerundet wird die Arbeit durch weitere Untersuchungen der Einflüsse von Amplitudendiskrepanz und Rauschen auf die Bestimmung des Distanzunterschieds.

Abstract

Indoor localization experiences more and more a high importance in our everyday lives. The *Global Positioning System* as well-known localization system by its function as car navigation assistant is a model for a multitude of indoor localization systems. Localization, the determination of positions, generally based on the measurement of various distances between different reference points and the point of aim.

This thesis describes and analyzes various issued publications of indoor localization systems and distance measurement procedures. By the *Localization by Superposing Beats* (LSB) method a new approach is analyzed to combine the two advantages of a high frequency signal to measure a distance with high resolution and the analysis of a low frequency signal with a low resource complexity. The LSB method based on the superposition of particularly parametrized beats. From the superposed interference signal it is built a low frequency envelope signal. The envelope is used to determine the relative distance difference between two signal sources and the interference point – the point of aim. The high frequency carrier signal specifies the measurement resolution of the distance. The particularly parametrized beats allow the determination of a wide spectrum of carrier signals by the same low frequency envelope. An important effect of the parametrized beats is the embedded synchronization between the signal sources and the interference point.

The main part of the thesis analyzes the theory of the LSB method and is evaluated by first straightforward experiments that obtain theoretically recognized results. Furthermore two procedures are described to determine the distance difference. The first procedure is a pattern matching procedure and the second procedure uses the Fourier analysis. The thesis is rounded out by analyses of the amplitude discrepancy and noise influence of the distance difference determination.

Veröffentlichungen

- [1] BIRUS, D. ; SCHNEIDER, M. ; RUMMEL, T. ; FRICKE, M.: The Quench Detection System of W7-X. In: *Proceeding of the 26th Symposium on Fusion Technology - (SOFT-26)*, 2010
- [2] BIRUS, D. ; SCHNEIDER, M. ; RUMMEL, T. ; FRICKE, M. ; PETRY, K. ; EBERSOLDT, A.: Processing of the quench detection signals in W7-X. In: *Proceeding of the 25th Symposium on Fusion Technology - (SOFT-25)*, 2008
- [3] JOOST, R. ; SALOMON, R. ; SCHNEIDER, M.: FPGAs and Soft-Core Processors: Understanding Computer Architectures and Processing Principles. In: *6th European Workshop on Microelectronics Education (EWME'06)*, 2006
- [4] SALOMON, R. ; SCHNEIDER, M. ; WEHDEN, D.: Low-Cost Optical Indoor Localization System for Mobile Objects without Image Processing. In: *11th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA'06)*, 2006
- [5] SCHNEIDER, M. ; SALOMON, R.: Localization by Superposing Beats: First Laboratory Experiments and Theoretical Analyzes. In: *13th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA'08)*, 2008
- [6] SCHNEIDER, M. ; SALOMON, R.: Superposing Beats: A Novel Method for High-Precision Indoor Localization. In: *10th International Conference on Computer Modeling and Simulation (EUROSIM/UKSIM'08)*, IEEE, 2008
- [7] SCHNEIDER, M. ; SALOMON, R.: Localization by Superposing Beats: Laboratory Experiments and Detection Algorithm. In: *6th IEEE International Symposium on Intelligent Signal Processing (WISP'09)*, 2009
- [8] SCHNEIDER, M. ; SALOMON, R.: Theoretical Analysis and Validated Experiments of the Localization by Superposing Beats. In: *2010 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN'10)*, 2010

- [9] SCHNEIDER, M. ; SALOMON, R.: The LSB Procedure: Signal Analysis. In: *Proceedings of the 2nd International Conference on Positioning and Context-Awareness (PoCA'11)*, 2011
- [10] SCHNEIDER, M. ; WEHDEN, D. ; SALOMON, R.: Akustische Ortung mobiler Objekte in großen Räumen. In: *32. Deutsche Tagung der Akustik (DAGA'06)*, 2006
- [11] WEHDEN, D. ; SALOMON, R. ; SCHNEIDER, M.: Low-Cost Sonic-Based Indoor Localization for Mobile Robots. In: *Proceedings of the 3rd Workshop of Positioning, Navigation and Communication (WPNC'06)*, 2006